A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

KÖNYVTÁR

A redukált számpárokról, avagy színezzük ki a négyzetrácsot

(Holló-Szabó Ferenc)

Összefoglaló a magasságtételről

(Dr. Darvasi Gyula)

Sokszínű matematika 5–12. osztály

X. ÉVFOLYAM 2002

1

MOZAIK

www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 980 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

A redukált számpárokról, avagy színezzük ki a négyzetrácsot
Holló-Szabó Ferenc adjunktus, Budapest

Összefoglaló a magasságtételről
Dr. Darvasi Gyula docens, Nyíregyháza

Feladatrovat tanároknak

Sokszínű matematika 5–12. osztály
Gondolatok a Mozaik új matematikakönyveiről

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Holló-Szabó Ferenc

A redukált számpárokról, avagy színezzük ki a négyzetrácsot

VERESEGYHÁZ KÖNYVTÁR

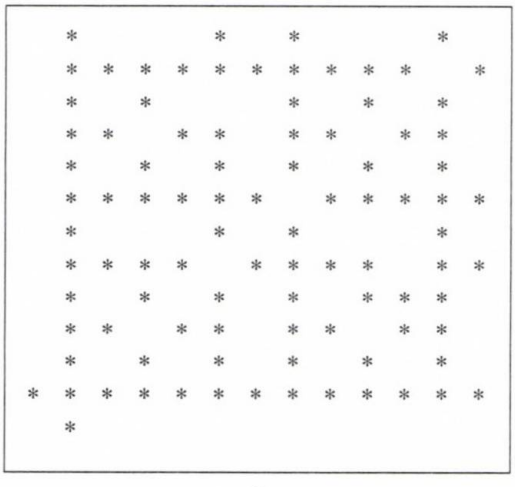
A jelen cikk megírására egy, a Bakos Tibor Matematikai Gyűjteményből most már kölcsönözhető iskolai szemléltetőeszköz elkészítése közben felgyülemlett tapasztalataim késztettek. A szóban forgó „transzparens", mint iskolai dekoráció is megállja a helyét, de elkészítésének vélt időigényessége miatt még kisebb méretben is csak ritkán találkozhatunk vele. Miről is van szó? Azt szeretnénk tudni, hogy az origóból mely rácspontok láthatóak. Ennek eldöntése érdekében a négyzetrács pontjait két osztályba soroljuk aszerint, hogy ezek a pontok az origóból nézve takarásban vannak-e.

A látható pontokat jelöljük meg. Így könnyen látható, hogy mindegyik síknegyedben ugyanazt, az *1.ábrán* is szemléltetett mintázatot kapjuk. Elegendő tehát az első síknegyedre szorítkoznunk!

Az alábbiakban számításba vesszük a látható pontok megjelölésének módozatait. Ismertetünk néhány olyan eljárást, amelynek segítségével ez az osztályozás hatékonyan „automatizálható". Végül a cikket a létrehozott mintázat bemutatásával és néhány, a témához kapcsolódó problémával zárjuk.

Alsóbb osztályokban – mielőtt a gyerekek először találkoznak a számpárok redukáltságának, azaz relatív prímségének fogalmával – érdemes néhány olyan problémát felvetni, ahol ezzel a fogalommal természetes módon kerülünk kapcsolatba. Az egyik példa erre a rácspontok origóból való láthatóságának vizsgálata *(1.ábra)*, vagy egy kicsit életszerűbb, ha a rácspontokba állított egységnyi „pálcikák" alkotta pálcikaerdőt kutatjuk *(2.ábra)*.

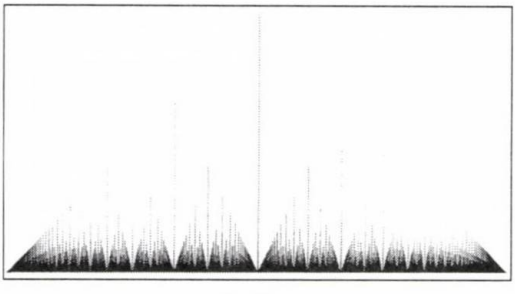
Vegyük számításba a fenti színezés elkészítésének lehetőségeit!



1.ábra
Térkép a látható facsemetékről

Lokális módszerek (pontról pontra haladva döntjük el, hogy melyik milyen színű)

1. A legidőigényesebb eljárás az lenne, ha sorra vennénk a rácspontokat és azok koordinátáinak prímtényezős felbontásait. Majd a tanult módon ezek felhasználásával határoznánk



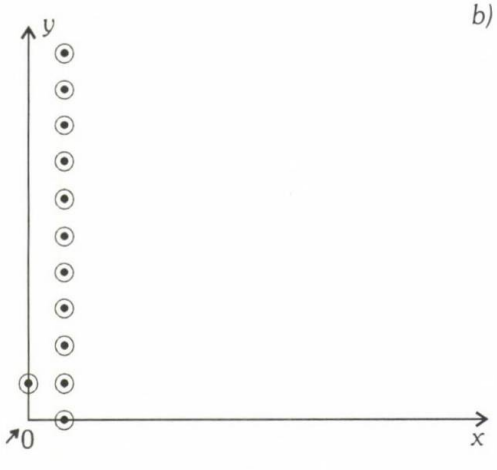
2. ábra
A pálcikaerdő perspektív képe

meg a koordináták legnagyobb közös osztóját, azaz összeszorozzuk a prímtényezős felbontásokban szereplő közös prímeknek a nem nagyobbik kitevővel vett hatványait.

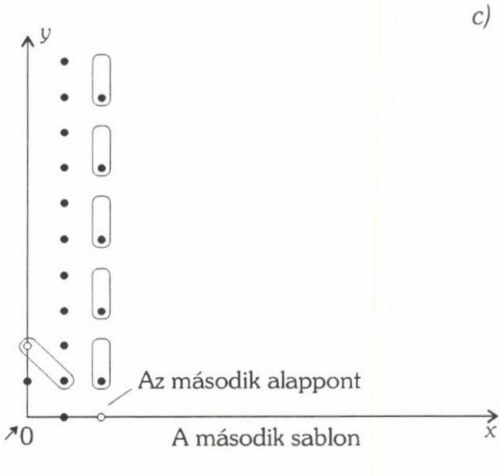
2. Sokkal hatékonyabban dolgozhatunk persze, ha a koordináták legnagyobb közös osztóját a prímtényezős felbontásaik ismerete nélkül kapjuk meg. Erre módunk van az alapvető fontosságú euklideszi algoritmus felhasználásával.

3. A leggazdaságosabb, de csak kisebb méretekben megbízható eljárás éppen azt használja ki, hogy egy rácspont pontosan akkor redukált, ha nincs takarásban az origóból nézve. Tehát összekötjük a rácspontot az origóval, és ha az összekötő szakasz nem illeszkedik más rácspontra, akkor a pontot megjelöljük.

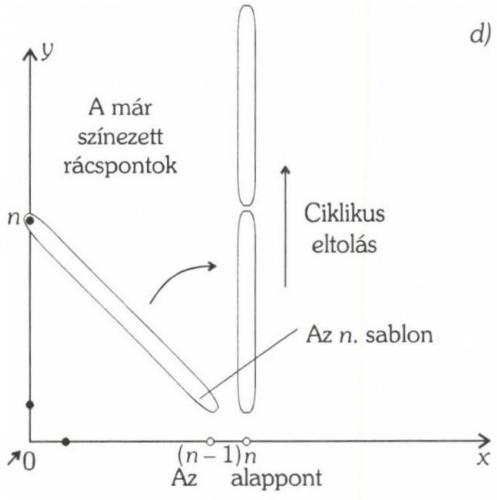
3.a ábra
A 0. oszlop és az alappontok színezése



3.b ábra
Az 1. sablonnal ciklikusan színezzük az 1. oszlopot



3.c ábra
Az 2. sablonnal ciklikusan színezzük az 2. oszlopot



3.d ábra
Az n. sablonnal ciklikusan színezzük az n.oszlopot, azaz az n.alappont körül az n. oszlopba „forgatjuk" az n. sablont kicsinyítjük, majd ciklikusan eltoljuk.

Globális módszerek (az eljárás egyes lépéseiben bizonyos pontcsoportok színét határozzuk meg)

4. Talán kevesen ismerik azt az eljárást, amely a redukált pontok negyedsíkbeli mintázatát minden előismeret nélkül és igen hatékonyan teszi meghatározhatóvá. A módszer hatékonysága abban áll, hogy nem pontonként színez, hanem minden oszlop színezéséhez előbb egy egyszerűen adódó sablont készít, majd ezzel ciklikusan színezi ki az aktuális oszlopot. Az alábbiakban ennek a globális színező algoritmusnak két változatát is ismertetjük:

Alapváltozat:

Szükségünk lesz a négyzetrácson a koordináta-tengelyekkel párhuzamos két rácsegyenes seregen kívül egy harmadikra is, mégpedig az $(n, 0)$ és a $(0, n)$ rácspontokat összekötő $e(n)$ szakaszok tartó egyeneseire, az ún. főátló egyenesekre. Ezek első síknegyedbeli részeire, illetve az általuk meghatározott rácspontsorozatokra értelemszerűen a sor, oszlop és átló elnevezéseket fogjuk használni. Az $e(n)$ átlón – a négyzetháló egyeneseihez hasonlóan – egyenletes közökkel követik egymást az $(n, 0),(n-1, 1),(n-2, 2),\ldots,(0, n)$ pontok.

Legyen az $e(n)$ átló $(n, 0)$ pontja kitüntetve, és nevezzük ezt n-edik alappontnak!

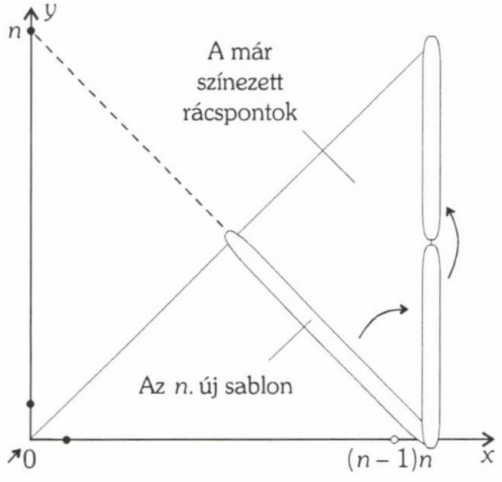
Egy rácspont pontosan akkor illeszkedik az $e(n)$ átlóra, ha koordinátáinak összege éppen n. Az $e(n)$ átlóra az alapponton kívül még pontosan n darab rácspont illeszkedik, s az alappontból nézve ezek fogják szolgáltatni az n-edik sablont, amellyel majd az n-edik oszlop ciklikus színezését fogjuk elvégezni az alappontból kiindulva.

Az indukciószerű algoritmus az origóból indul. Mindenekelőtt a tengelyek, mint 0-dik oszlop, illetve sor színezését állapítjuk meg *(3.a ábra)*. Ezáltal az összes alappont s az $e(1)$ színezése és így az első sablon is ismertté válik. Tehát nincs akadálya annak, hogy az első oszlop színezését az első alappontból kiindulva az első sablonnal ciklikusan dolgozva elkészítsük *(3.b és c ábra)*.

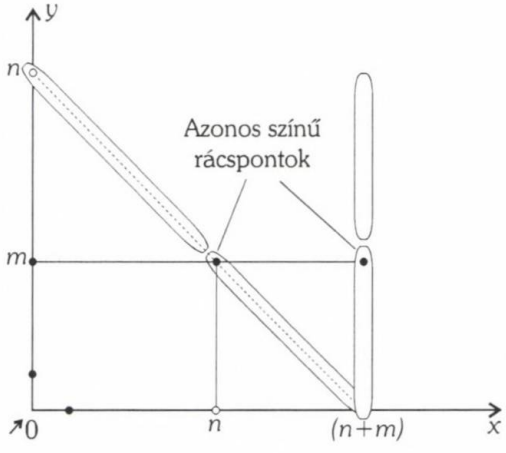
A továbbiakban feltehetjük, hogy az első $(n-1)$ darab oszloppal már készen vagyunk! Vegyük észre, hogy ekkor az $e(n)$ színezése és így az n-edik sablon is ismertté válik, amivel a következő oszlopot a következő alappontból kiindulva minden akadály nélkül kiszínezhetjük *(3.d ábra)!* Következhet az $(n+1)$-edik oszlop színezése!...

Módosított változat:

Használjuk ki a relatív prímség fogalmának szimmetriáját! A sorok és oszlopok szerepe nyilván felcserélhető, a negyedsík egyetlen szim-



4.ábra
A nyolcadsík színezése a félátlók mintáinak felhasználásával



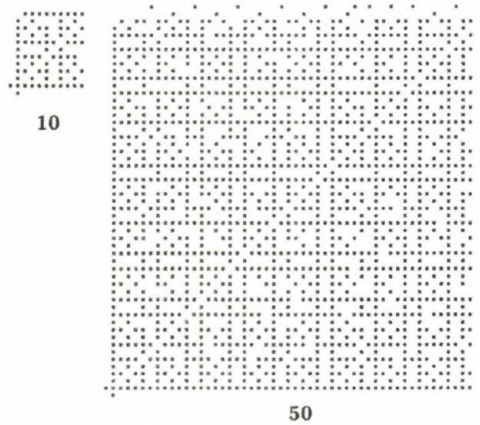
5.ábra
A módosított változatnál egymásnak megfelelő rácspontok

metriatengelyére a benne kapott mintázat is szimmetrikus. Az (n, k) és (k, n) pontok ugyanis egymás tükörképei a síknegyed szimmetriatengelyére nézve, így ők egyszerre látszanak vagy sem. Elegendő tehát az első sík nyolcad színezését meghatároznunk, ennek ismeretében a teljes sík mintázata adódik néhány tengelyes tükrözés segítségével.

A szimmetria miatt az alappontokkal kiegészített sablonok, az ún. láncsablonok is szimmetrikusak, ezért elég ez utóbbiaknak pl. az alappontot tartalmazó felét ismernünk. Vigyázzunk arra, hogy a páros hosszúságú sablonok esetén lesz olyan elem, ami mindkét fél láncsablonhoz – nevezzük ezt új sablonnak – hozzátartozik.

A módosított változat nagy előnye, hogy az n-edik oszlopnak csak egy véges, n hosszúságú és az alappontra illeszkedő részét kell kiszíneznünk ahhoz, hogy a következő oszlop színezésére léphessünk át.

Az indukciószerű algoritmus most is az origóból indul. Mindenekelőtt az x tengely, mint 0-dik sor színezését állapítjuk meg *(4. a ábra)*. Ezáltal az összes alappont, s az első új sablon színezése is ismertté válik. Tehát nincs akadálya annak, hogy az első oszlop színezését az első új sablonnak az első alappont körüli forgatása, majd egyszeri tengelyes tükrözése után megkapjuk *(4.b ábra)*.



6.ábra
A redukált pontpárok által létrehozott 50×50-es minta

A színezési eljárások jogosságához elegendő azt megfontolni, hogy az $(n+m)$-edik átló (n, m) pontjának az $(n+m)$-edik oszlop első nyolcadsíkbeli m-edik pontja felel meg *(5. ábra)*. Továbbá az n és m egész számok legnagyobb közös osztója megegyezik az $(n+m)$ és m számokéval.

A fentiekben igyekeztünk minél ügyesebben létrehozni a sík rácspontjainak halmazán egy olyan mintázatot, amelynek segítségével „vizuálisan" dönthető el egy számpárról, hogy relatív prímek-e. Búcsúzóul egy 50×50-es méretű mintát mutatunk be *(6. ábra)*.

Néhány, a redukált számpárokkal kapcsolatos probléma:

1. Írjunk fel egy racionális számot közönséges tört alakban a lehető legkisebb természetes számok segítségével!

2. Adjunk össze két közönséges törtet! Keressünk közös nevezőt!
Van-e a kiinduló nevezők szorzatánál kisebb közös nevező?

3. Tekintsünk egy, a négyzethálón a rácsvonalak által meghatározott téglalapot! Húzzuk be a téglalap egyik átlóját! Ez az átló a téglalap belsejében hány rácsponton halad át?

4. Négyzethálós elrendezésben facsemetéket telepítünk (a csemeték lombozata elhanyagolható). Az egyik hiányzó csemete helyéről szemlélve a gazda mely csemeték törzsén veheti észre, hogy azt a nyulak megrágták? (Feltételezzük persze, hogy az észlelést csak az akadályozza, hogy a csemetét egy másik takarja.) ...

5. Vegyük a koordinátasík i és j bázisvektorainak sorozatát, mint egy véges sorozatokat készítő rekurzív eljárás kiinduló (nulladik) sorozatát! Készüljön az n. vektorsorozat az előzőből úgy, hogy abban minden két szomszédos elem közé beiktatjuk azok összegvektorát! Jelöljük meg az eljárás vég nélküli alkalmazásával előálló vektoroknak, mint helyvektoroknak megfelelő pontokat! Hasonlítsuk össze az így kapott mintázatot a fentiekkel!

Dr. Darvasi Gyula

Összefoglaló a magasságtételről

Az alábbiakban a magasságtétel szokásos bizonyításán és egy közismert alkalmazásán túl e tétellel kapcsolatban összefoglalunk olyan további tényeket, amelyek a közép- és felsőfokú oktatásban egyaránt jól hasznosíthatók.

1. A közismert tények

A magasságtétel a derékszögű háromszögre vonatkozó három arányossági tétel egyike; a másik kettő a Pitagorasz-tétel és a befogótétel.

A magasságtétel állítása kétféleképpen is kimondható:

- A derékszögű háromszög magassága a befogók átfogóra vetett merőleges vetületeinek a mértani középarányosa.
- Minden derékszögű háromszögre a magasság fölé szerkesztett négyzet területe egyenlő az átfogó azon részeiből szerkesztett téglalap területével, amelyekre az átfogót a magasság talppontja osztja.

Nyilvánvaló, hogy mindkét megfogalmazásban az átfogóhoz tartozó magasság értendő. Az első a közismert alak, jóllehet ahhoz a merőleges vetítést és a mértani középarányost is szükséges ismerni. A második hosszabb ugyan, de mégis szemléletesebb, mivel abban csak két jól ismert négyszög területe az összehasonlítandó.

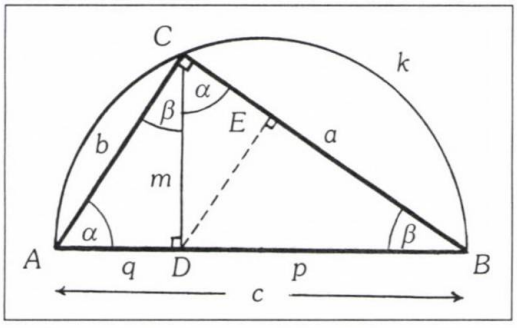
A magasságtétel szokásos bizonyítása háromszögek hasonlóságán alapul. Ugyanis az $\overline{AB}$ átfogójú ABC derékszögű háromszöget a $\overline{CD}$ magasság az ACD és CBD hasonló derékszögű háromszögekre bontja, minthogy a megfelelő hegyes szögeik merőleges szárú szögpárokat alkotnak *(1. ábra)*. E hasonlóság miatt a megfelelő oldalak arányára $BD : CD = CD : AD$, azaz $p : m = m : q$ teljesül, ahonnan $m^2 = pq$ kapható.

A magasságtétel és a Thalész-tétel alapján egyszerű mód kínálkozik két adott szakasz mértani közepének a megszerkesztésére: az $\overline{AD}$ és $\overline{DB}$ adott szakaszok $\overline{AB}$ összege legyen a k félkör átmérője, amelyet az $\overline{AB}$-re D-ben állított merőleges egy C pontban metsz, s ekkor $\overline{CD}$ a keresett mértani közép *(1. ábra)*.

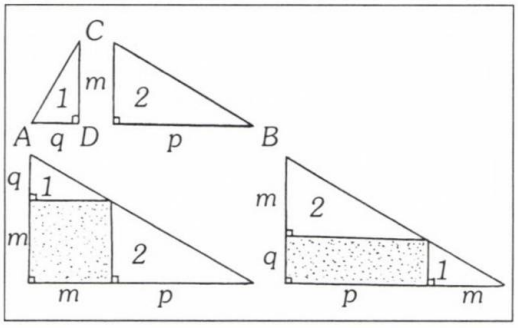
Az előbbi szerkesztés alkalmas arra is, hogy adott téglalaphoz ugyanakkora területű négyzetet szerkesszünk.

2. A magasságtétel logikai kapcsolatai a Pitagorasz- és a befogótétellel

Megmutatható, hogy a magasságtétel következik akár a Pitagorasz-tételből, akár a befogótételből.



1. ábra



2. ábra

Ugyanis egyrészt az *ABC*, *ACD* és *BCD* derékszögű háromszögekre *(1. ábra)* teljesülnek a $c^2 = a^2 + b^2$, $a^2 = p^2 + m^2$ és $b^2 = q^2 + m^2$ pitagoraszi egyenlőségek, ahonnan $c = p + q$ miatt $p^2 + q^2 + 2m^2 = a^2 + b^2 = c^2 = (p+q)^2$, s ebből pedig $m^2 = pq$ kapható.

Másrészt a befogótétel alapján az *ABC* háromszögből $a^2 = pc = p(p+q) = p^2 + pq$, a *BCD* derékszögű háromszögből pedig a $\overline{DE}$ magasságot *(1. ábra)* berajzolva $p^2 = BE \cdot a$ és $m^2 = CE \cdot a = (a - BE)\, a = a^2 - BE \cdot a$, s ennélfogva $m^2 = (p^2+pq) - p^2 = pq$ adódik.

Megjegyezzük, hogy ez a két logikai összefüggés csak úgy fordítható meg, ha a magasságtételhez hozzávesszük a hasonlóságból adódó valamely másik arányt, vagy a Thalész-tételt. Viszont a hasonlóság alapján közvetlenül levezethető a Pitagorasz-tétel és a befogótétel is. Ennélfogva a magasságtételből a Thalész-tétel segítségével kapható a Pitagorasz-tétel és a befogótétel.

3. További bizonyítások

Ha az $\overline{AB}$ átfogójú *ABC* derékszögű háromszögben $a = b$, vagyis a háromszög egyenlőszárú, akkor $p = m = q$, s így a magasságtétel állítása is teljesül.

A továbbiakban legyen $a \neq b$, s ezáltal $a < b$ esetén $p < m < q$, míg $a > b$ esetén $p > m > q$.

3.1. Kiegészítéses bizonyítások

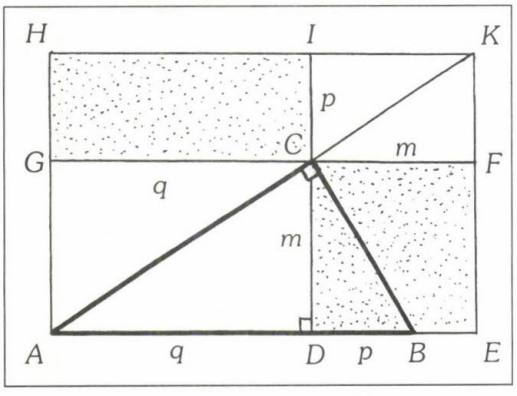
Ennél a bizonyítási módnál az összehasonlítandó területű két alakzatot páronként egybevágó alakzatokkal kiegészítjük. Ha e kiegészítés során olyan két újabb alakzathoz jutunk, amelyek területeinek egyenlősége egyértelműen megállapítható, akkor a kiegészítő alakzatok páronkénti egybevágósága miatt az eredeti két alakzat is egyenlő területű.

Erre a bizonyítási módra három változatot ismertetünk.

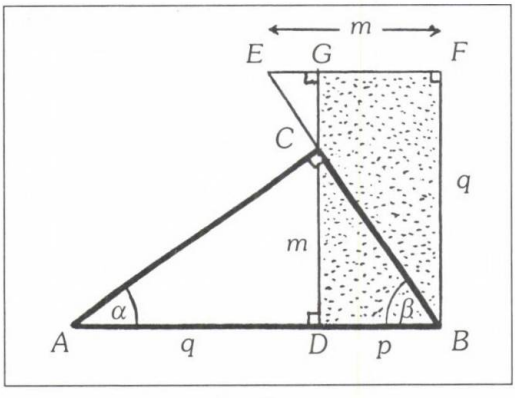
1. változat

Az *ABC* derékszögű háromszöget a $\overline{CD}$ magasság mentén szétvágva kapjuk az *ACD* és *BCD* részháromszögeket, amelyek egyrészt a magasság fölé szerkesztett négyzetet, másrészt az átfogó két darabjával szerkesztett téglalapot úgy egészítik ki, hogy két egybevágó derékszögű háromszög adódik *(2. ábra)*. Ezen egybevágóság miatt a kiegészített négyzet és téglalap egyenlő területű, azaz $m^2 = pq$.

Ez a bizonyítási mód a magasságtétel felfedeztetésére is alkalmas tevékenységi formát kínál, ami tulajdonképpen egy kirakós játékként indulhat. Az ehhez szükséges játékkészlet állhat a következő lapokból: 3 db *ACD*-vel egybevágó háromszög, 3 db *BCD*-vel egybevágó háromszög, 1 db *CD* oldalú négyzet és 1 db $AD \times BD$ oldalú téglalap. A játék azzal kezdődik, hogy az *ACD* és *BCD* háromszögekből összeállítjuk az



3. ábra



4.a ábra

ABC derékszögű háromszöget. Ezután annak magasságát összehasonlítjuk a négyzet oldalával, az átfogó két részét pedig a téglalap oldalaival. Ezt követheti a négyzet majd a téglalap kiegészítése két-két háromszöggel úgy, hogy két egybevágó derékszögű háromszöget kapjunk. A játék alapján felfedezhető, hogy e négyzet és téglalap egyenlő területű.

2. változat

Az ABC derékszögű háromszögből kiindulva legyen $CDEF$ a $\overline{CD}$ magasság fölé $B \in \overline{DE}$ feltétellel szerkesztett négyzet, valamint $CGHI$ az $\overline{AB}$ átfogó $\overline{AD}$ és $\overline{BD}$ szeleteiből szerkesztett téglalap úgy, hogy $A \in \overline{GH}$ és $\overline{CG} \,||\, \overline{AB}$ teljesüljön *(3. ábra)*. Ekkor az $\overleftrightarrow{EF}$ és $\overleftrightarrow{HI}$ egyenesek K metszéspontja a BCD és KCF derékszögű háromszögek egybevágósága és $\overline{CF} \,||\, \overline{AB}$ miatt rajta van az $\overleftrightarrow{AC}$ egyenesen, így az $AEKH$ négyszög téglalap, amit az $\overline{AK}$ átló az egyenlő területű AEK és AHK háromszögekre bont. Ezekből vegyük el a páronként egybevágó ACD és CAG, illetve CKF és KCI háromszögeket. Mivel egyenlőkből egyenlőket vettünk el, ezért a visszamaradó $CDEF$ négyzet és $CGHI$ téglalap is egyenlő területű, azaz $m^2 = pq$ teljesül.

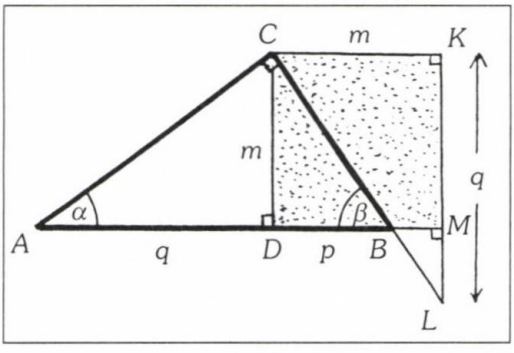
3. változat

Az ABC derékszögű háromszöget a $\overline{CD}$ magasság mentén szétvágva kapjuk az ACD és BCD részháromszögeket. A BCD háromszöget rögzítjük, az ACD háromszöget pedig a $4 \cdot a$ és $4 \cdot b$ ábrák szerint helyezzük el. Az így kapott $BDCEF$ és $BDCKL$ ötszögek területe nyilvánvalóan egyenlő. Legyen $G = \overleftrightarrow{CD} \cap \overleftrightarrow{EF}$ és $M = \overleftrightarrow{BD} \cap \overleftrightarrow{KL}$. Ekkor a $BDCEF$ ötszög felbontható a $BDGF$ téglalapra és a CEG derékszögű háromszögre, amelynek befogói $EG = m - p$ és $CG = q - m$, továbbá szögei $C\sphericalangle = \alpha$ és $E\sphericalangle = \beta$. A $BDCKL$ ötszög pedig felbontható a $DCKM$ négyzetre és a BLM derékszögű háromszögre, amelyben $BM = m - p$ és $LM = q - m$, továbbá $L\sphericalangle = \alpha$ és $B\sphericalangle = \beta$. Mindezek alapján a CEG és LBM háromszögek egybevágók, s ennélfogva $m^2 = t(DKCM) = t(BDCKL) - t(LBM) = t(BDCEF) - t(CEG) = t(BDGF) = pq$.

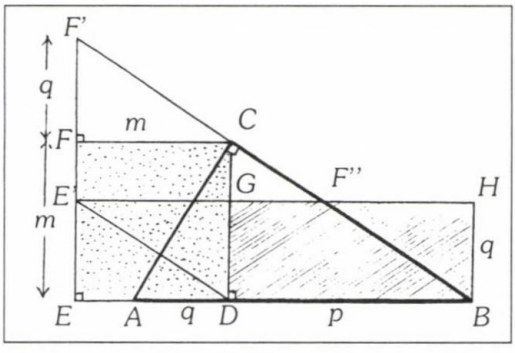
Megjegyezzük, hogy az ACD és BDC háromszögek szerepe felcserélhető.

3.2. Átalakításos bizonyítás

Az $\overline{AB}$ átfogójú ABC derékszögű háromszög $\overline{CD}$ magassága fölé szerkesszünk $CDEF$ négyzetet úgy, hogy az A csúcs a $\overline{DE}$ oldal belső pontja legyen *(5. ábra)*, ami $q < m < p$ esetén lehetséges. Legyen E' a D ponton át $\overline{BC}$-vel húzott párhuzamos és az $\overleftrightarrow{EF}$ egyenes metszéspontja, továbbá $F' = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{EF}$. Ekkor $DEF'_\Delta \cong CFF'_\Delta \cong CDA_\Delta$ miatt $EE' = EF' = AD = q$. Az E' ponton át $\overline{AB}$-vel párhuzamos messe $\overline{CD}$-t G és $\overline{BC}$-t F'' pontokban. Legyen H a $\overline{BD}$ és $\overline{DG}$ oldalú téglalap negyedik csúcsa.



4.b ábra



5. ábra

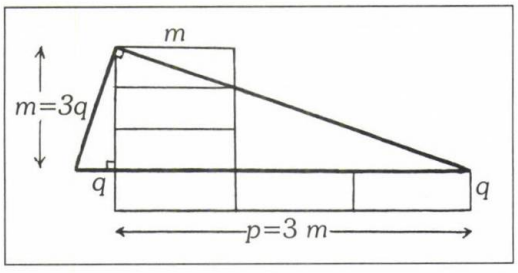
Ezekután Euklidesz I.35-ös tételének többszöri alkalmazásával $CDEF \to CDE'F' \to BDE'F'' \to$ $\to BDGH$, azaz $m^2 = pq$ adódik.

3.3. Átdarabolásos bizonyítások

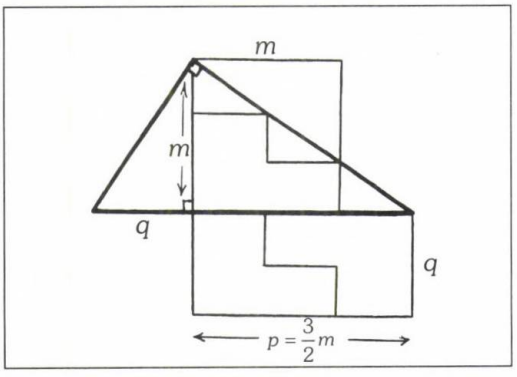
Bolyai Farkasnak a sokszögek átdarabolására vonatkozó alaptétele szerint bármely két egyenlő területű sokszög átdarabolható egymásba. Ez pontosan azt jelenti, hogy e két sokszög bármelyike felbontható közös belső pont nélküli véges sok sokszögtartományra, amelyek elrendezhetők úgy, hogy a másik sokszöget egyrétűen és hézagmentesen lefedjék.

Mi most a magasságtétel bizonyításához ezen alaptétel megfordítását használjuk fel. Először néhány olyan esetet mutatunk be, amikor a befogók aránya racionális: például 3:1 *(6.a ábra)*, 3:2 *(6.b ábra)*, vagy 5:2 *(6.c ábra)*. A 3:2 arány általánosan $(k+1):k$, az 5:2 arány általánosan $(3k-1):k$, ahol $k \geq 2$ egész.

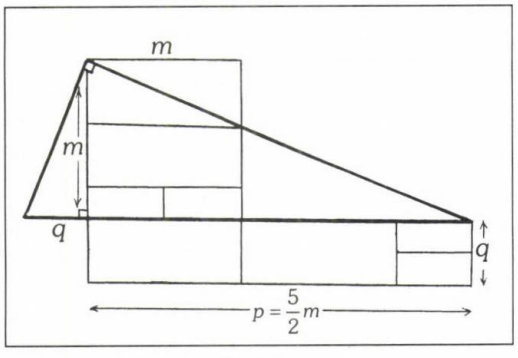
Irracionális arányra három egyszerű példa: $\sqrt{2}:1$ *(7.a ábra)*, $2\sqrt{2}:1$ *(7.b ábra)* és $\sqrt{5}:1$ *(7.c ábra)*.



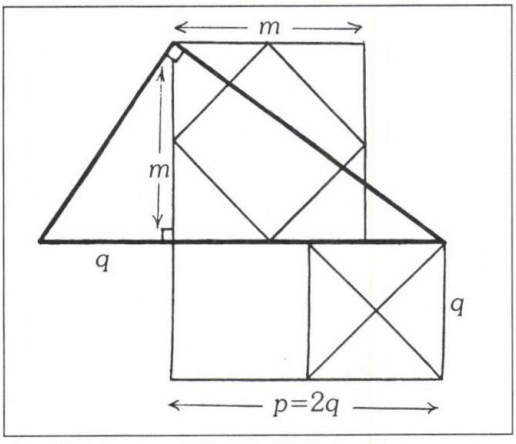
6.a ábra



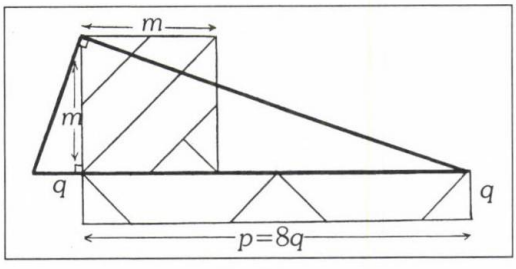
6.b ábra



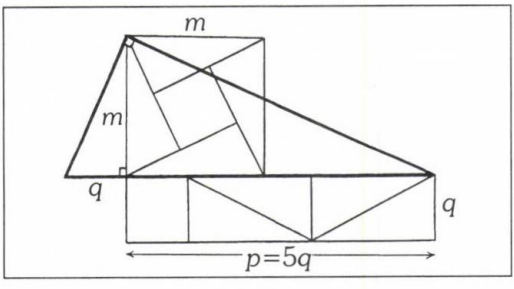
6.c ábra



7.a ábra



7.b ábra



7.c ábra

Különleges példaként foglalkozunk még az aranymetszésből ismert $(1+\sqrt{5}):2$ aránnyal. Ekkor $a > b$ esetén

$$\frac{p}{m}=\frac{a}{b}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}>\frac{4}{1+\sqrt{5}}=\frac{2b}{a}=\frac{2q}{m}$$

miatt $q < m < 2q < p$ is fennáll. Most a *8. ábra* szerint a $CDEF$ négyzet darabolandó át a $DGHB$ téglalapba. Ehhez legyen A' az A-nak D-re vonatkozó tükörképe, $P = \overline{BC} \cap \overline{EF}$, Q és R pedig a P-n át $\overline{AB}$-vel párhuzamosan húzott egyenesnek $\overline{CA'}$ illetve $\overline{CD}$ szakasszal való metszéspontjai. Az átdarabolás elvégzése előtt az átdaraboláshoz felhasználandó megfelelő részek egybevágóságának eldöntése céljából hasonlítsunk össze néhány szakaszt és szöget. $ACD_\triangle \cong PCF_\triangle$ miatt $FP = AD = q$, a tükrözés miatt $DA' = AD = q$ és $CA'D\sphericalangle = \alpha$. $\overline{PR} \,||\, \overline{AB}$ miatt $PR = m$, $CR = FP$ és $QCR_\triangle \sim A'CD_\triangle$, s így

$$QR=\frac{CR\cdot DA'}{CD}=\frac{q^2}{m} \quad \text{és}$$

$$PQ = PR - QR = m - \frac{q^2}{m} < m, \text{ továbbá}$$

$$\frac{PQ+m}{m}=\frac{\frac{m^2-q^2}{m}+m}{m}=\frac{2m^2-q^2}{m^2}=$$

$$=2-\left(\frac{q}{m}\right)^2=2-\frac{4}{6+2\sqrt{5}}=$$

$$=2-\frac{2}{3+\sqrt{5}}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}=$$

$$=2-\frac{2(3-\sqrt{5})}{4}=2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=\frac{p}{m},$$

ahonnan $PQ+m = p = BD = BE+m$. Ennélfogva $\overline{PQ} \,||\, \overline{BE}$ és $PQ = BE$, vagyis az $EBPQ$ négyszög parallelogramma, s emiatt $\overline{EQ} \,||\, \overline{BC}$ és $A'EQ\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. $GH = p = PQ+m$ miatt a $\overline{GH}$-nak van olyan S belső pontja, amelyre $GS = PQ$ és $SH = m$. Ezért $BSH_\triangle \cong A'CD_\triangle$ és $DGSE \cong FPQC$. Ha $T = \overleftrightarrow{EF} \cap \overleftrightarrow{BS}$, akkor $SH = m > PQ = BE$ miatt T a $\overline{BS}$ belső pontja, továbbá $EBT\sphericalangle = 90° - SBH\sphericalangle = 90° - CA'D\sphericalangle = ABC\sphericalangle$. Ekkor $TBE_\triangle \cong PBE_\triangle \cong EQP_\triangle$, valamint $ET = PE = m - q = A'E$ és $ETS\sphericalangle = 180° - BTE\sphericalangle = 180° - CA'D\sphericalangle = EA'Q\sphericalangle$, amiből $ETS_\triangle \cong EA'Q_\triangle$ adódik.

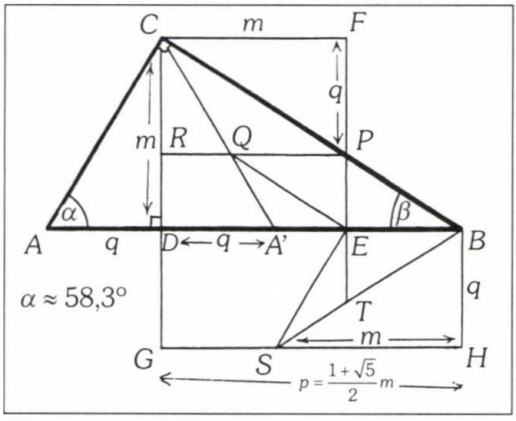
A keresett átdarabolás menete tehát a következő:

$$CDEF \to A'CD + FPQC + EQP + EA'Q \to$$
$$\to BSH + DGSE + TBE + ETS \to DGHB.$$

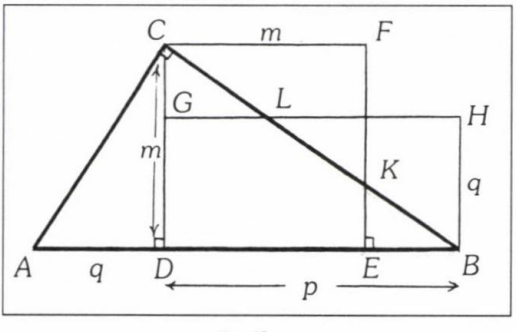
További lehetséges speciális arányok keresése helyett térjünk rá az átdarabolás általános esetének leírására, amire két változatot ismertetünk.

1. változat

A $q < m < p$ esetet választva a $\overline{CD}$ magasság fölé szerkesszük meg a $CDEF$ négyzetet úgy,



8. ábra



9. ábra

hogy az E csúcs a $\overline{BD}$ szakasz belső pontja legyen *(9. ábra)*. $p < m$ miatt ez lehetséges, s ekkor $BE = p - m$. Ezután a $\overline{BD}$ szakasz fölé szerkesszük meg a $BDGH$ téglalapot úgy, hogy a G csúcs a $\overline{CD}$ magasság belső pontja legyen, és $DG = AD = q$ teljesüljön. $q < m$ miatt ez lehetséges, s ekkor $CG = m - q$. Most tehát a $CDEF$ négyzet darabolandó át a $BDGH$ téglalapba.

Ekkor $K = \overline{BC} \cap \overline{EF}$ és $L = \overline{BC} \cap \overline{GH}$ jelöléssel

$$ABC_\triangle \sim CBD_\triangle \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{m}{p} \Rightarrow m = \frac{b}{a} \cdot p$$

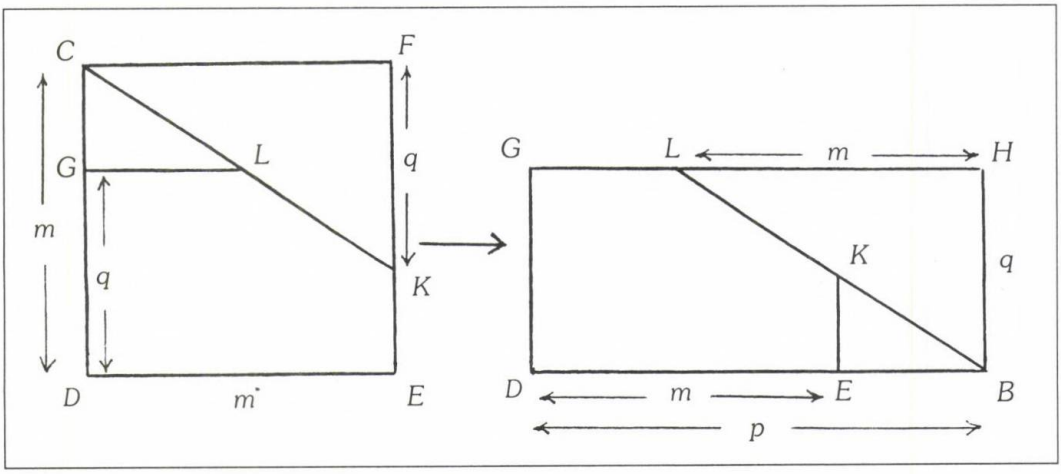
$$ABC_\triangle \sim ACD_\triangle \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{q}{m} \Rightarrow q = \frac{b}{a} \cdot m$$

$$ABC_\triangle \sim KBE_\triangle \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{EK}{p-m} \Rightarrow EK = \frac{b}{a} \cdot (p-m).$$

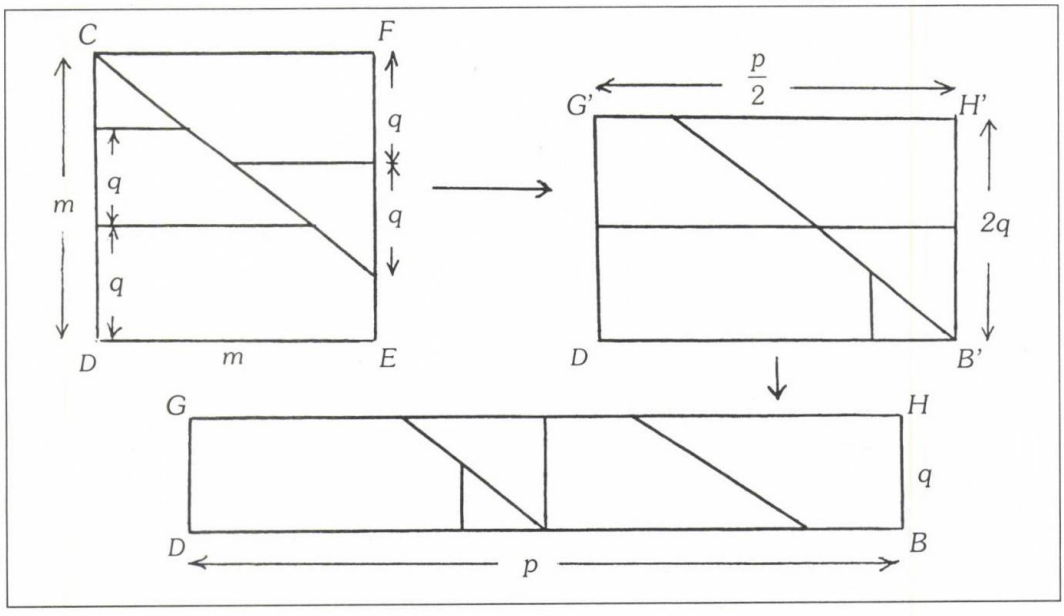
vagyis

$$EK = \frac{b}{a} \cdot p - \frac{b}{a} \cdot m = m - q = CG$$

s ennélfogva $KBE_\triangle \cong CLG_\triangle$ és $BLH_\triangle \cong KCF_\triangle$.



10. ábra



11. ábra

Tételezzük fel, hogy a K pont nincs kívül a $GDBH$ téglalapon, azaz $EK \le q$ és így $m \le 2q$. Ekkor az eddigiek alapján a $CDEF$ négyzet átdarabolható a $GDBH$ téglalapba *(10. ábra)*.

$m = 2q$, vagyis $\alpha \approx 63{,}4°$ esetén csak annyi a változás, hogy a K és L pontok egybeesnek.

Ha viszont $m > 2q$, akkor a K pont kívül van a $GDBH$ téglalapon, s így a fenti átdarabolás nem végezhető el. Tulajdonképpen csak az a baj, hogy a $GDBH$ téglalap túl hosszú és nem elég magas. A megoldást az jelenti, hogy a $GDBH$ téglalapot helyettesítjük egy feleakkora hosszú és kétszeres magasságú $G'DB'H'$ téglalappal, ahol $K' = \overline{B'C} \cap \overline{EF}$. Ezután $EK' = CG' = m - 2q \le 2q$, azaz $2q < m \le 4q$ esetén az átdarabolás már elvégezhető: $CDEF \to G'DB'H' \to GDBH$ *(11. ábra)*.

Ha pedig $EK' > 2q$, akkor a $GDBH$ téglalapot a harmadakkora hosszú és háromszoros magasságú $G''DB''H''$ téglalappal helyettesítjük. Ezen helyettesítések révén véges sok lépésben mindig visszajutunk az első esethez, s így a $CDEF \to GDBH$ átdarabolás is mindig elvégezhető, s ez a magasságtétel egy átdarabolásos bizonyítását jelenti.

2. változat

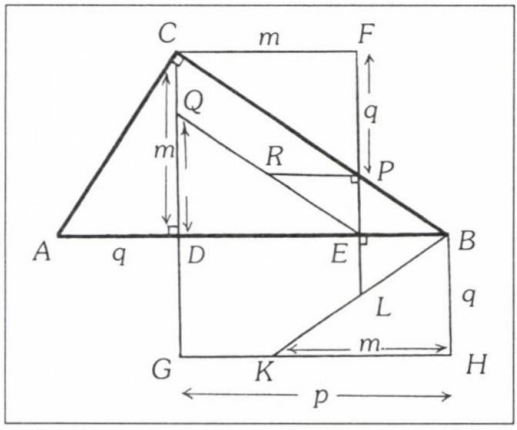
A $q < m < p$ esetet választva szerkesszük meg a $CDEF$ négyzetet úgy, hogy az E csúcs a $\overline{BD}$ szakasz belső pontja legyen, ami $p > m$ esetén elvégezhető. Ezután szerkesszük meg a $BDGH$ téglalapot úgy, hogy D a $\overline{CG}$ szakasz belső pontja legyen és $DG = AD = q$ teljesüljön.

Ekkor a $CDEF$ négyzet darabolandó át a BDGH téglalapba.

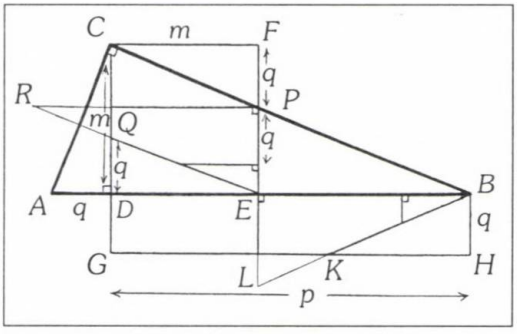
Ehhez legyen $P = \overline{BC} \cap \overline{EF}$, Q az E ponton át $\overline{BC}$-vel párhuzamosan húzott egyenesnek a $\overline{CD}$-vel alkotott metszéspontja, és R a P ponton át $\overline{AB}$-vel párhuzamosan és az $\overrightarrow{EQ}$ egyenes metszéspontja, továbbá K a $\overline{GH}$ szakasz olyan belső pontja, amelyre $HK = DE = m$, valamint $L = \overrightarrow{EF} \cap \overrightarrow{BK}$.

$$1 < \frac{m}{q} < 2$$

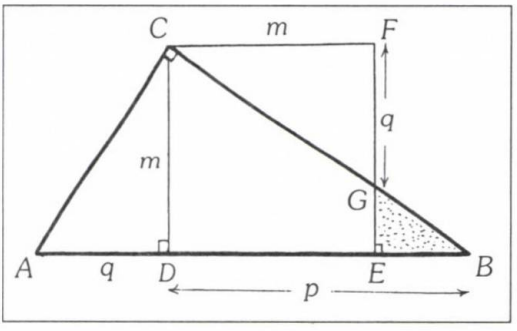
esetén R az $\overline{EQ}$ és L a $\overline{BK}$ belső pontja, s ekkor $QED_\triangle \cong BKH_\triangle$, $CFPRQ \cong EDGKL$ és $ERP_\triangle \cong LBE_\triangle$ miatt az átdarabolás három résszel elvégezhető *(12. ábra)*.



12. ábra



13. ábra



14. ábra

$$\frac{m}{q} = 2$$

esetén csak annyi az eltérés, hogy $R \equiv Q$ és $K \equiv L$ miatt az ötszögekből téglalapok lesznek.

$$\frac{m}{q} > 2$$

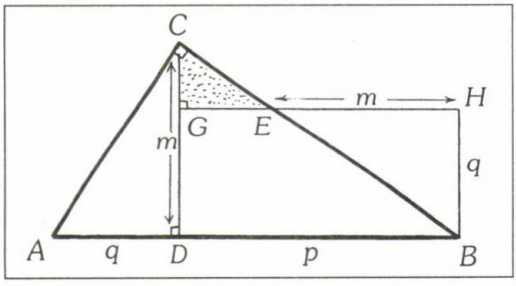
esetén az *E-Q-R* és *B-K-L* elrendezések állnak fenn, s ekkor az átdarabolás további alesetekre bontandó. Itt csak a

$$2 < \frac{m}{q} < 3$$

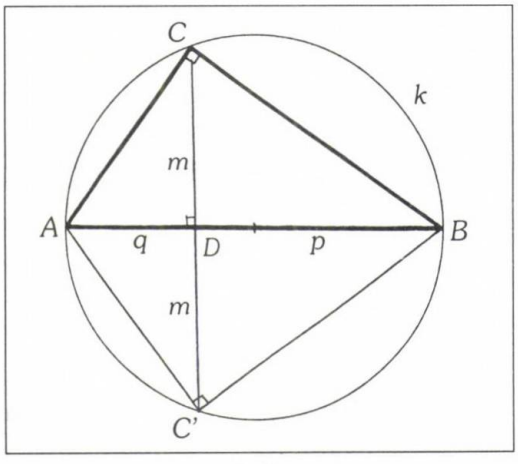
esetet mutatjuk be a *13. ábrán,* ahol az átdarabolás négy résszel elvégezhető.
Az alesetek az

$$1 \le k < \frac{m}{q} \le k+1$$

feltétel szerint tagolhatók, s az átdarabolás egyenlőség esetén $k+1$, míg egyenlőtlenség esetén $k+2$ résszel elvégezhető.



15. ábra



16. ábra

3.4. Területszámításos bizonyítások

1. változat

A $q < m < p$ eset szerint a $\overline{CD}$ magasság fölé szerkeszthető egy *CDEF* négyzet úgy, hogy *E* a $\overline{BD}$ szakasz belső pontja legyen *(14. ábra),* s ezért $EB = BD - DE = p - m$. Ha $G = \overline{BC} \cap \overline{EF}$, akkor $ACD_\triangle \cong GCF_\triangle$ miatt $FG = AD = q$, s így a *BEG* derékszögű háromszög területére egyrészt

$$t(BEG_\triangle) = \frac{EB \cdot EG}{2} = \frac{(BD - DE)(EF - FG)}{2} = \frac{(p-m)(m-q)}{2},$$

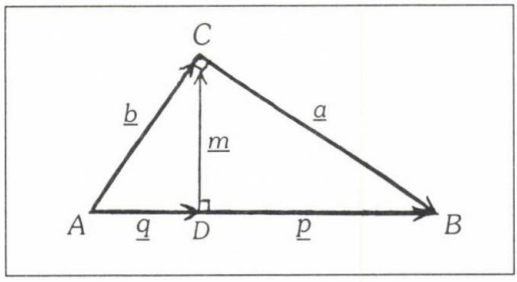
másrészt

$$t(BEG_\triangle) = t(BCD_\triangle) - t(CDEG) = \frac{pm}{2} - \frac{\left[m + (m-q)\right]m}{2} = \frac{pm + qm - 2m^2}{2}$$

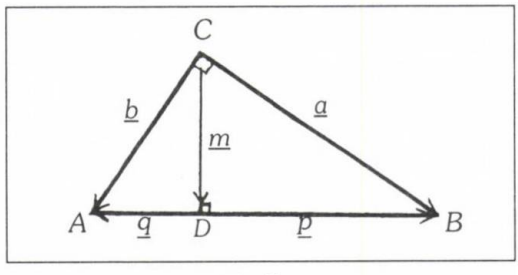
teljesül, amelyeket összehasonlítva $m^2 = pq$ adódik.

2. változat

A $\overline{BD}$ szakasz fölé $G \in CD$ és $DG = q$ feltétellel megszerkesztett *BDGH* téglalap által a *BCD* háromszögből lemetszett *CEG* derékszö-



17. ábra



18. ábra

gű háromszög *(15. ábra)* területének kétféle kiszámítása szintén célhoz vezet:

$$t(CEG_{\triangle}) = \frac{EG \cdot CG}{2} = \frac{(GH - EH)(CD - DG)}{2} = \frac{(p-m)(m-q)}{2},$$

és

$$t(CEG_{\triangle}) = t(BCD_{\triangle}) - t(BDGE) = \frac{pm}{2} - \frac{[p+(p-m)]q}{2} = \frac{pm+qm-2pq}{2}$$

amelyeket összehasonlítva $m^2 = pq$ kapható.

3.5. Bizonyítás pont körre vonatkozó hatványával

Ha C' jelöli a C csúcsnak az $\overline{AB}$ átfogó egyenesére vonatkozó tükörképét *(16. ábra)*, akkor $AC'B\sphericalangle = ACB\sphericalangle = 90°$ miatt C' rajta van az ABC háromszög k körülírt körén, amelynek az $\overline{AB}$ szakasz az átmérője és a $\overline{CC'}$ szakasz egy húrja, s ezek D metszéspontjának a k körre vonatkozó hatványa szerint $CD \cdot C'D = AD \cdot BD$, ahonnan $m^2 = pq$.

3.6. Vektoralgebrai bizonyítások

1. változat

A *17. ábra* jelöléseit használva $\underline{a} = \underline{p} - \underline{m}$ és $\underline{b} = \underline{q} + \underline{m}$, ahonnan $\underline{a} \perp \underline{b}$ miatt $\underline{a} \cdot \underline{b} = (\underline{p} - \underline{m})(\underline{q} + \underline{m}) = 0$, továbbá $|\underline{m}| = m$, $|\underline{p}| = p$, $|\underline{q}| = q$, $\underline{m} \perp \underline{p}$, $\underline{m} \perp \underline{q}$ és $\underline{p} \uparrow\uparrow \underline{q}$ miatt $m^2 = pq$.

2. változat

A 18. ábra jelöléseit használva $\underline{a} = \underline{m} + \underline{p}$ és $\underline{b} = \underline{m} + \underline{q}$, ahonnan $\underline{a} \perp \underline{b}$ miatt $\underline{a} \cdot \underline{b} = (\underline{m} + \underline{p})(\underline{m} + \underline{q}) = 0$, továbbá $|\underline{m}| = m$, $|\underline{p}| = p$, $|\underline{q}| = q$, $\underline{m} \perp \underline{p}$, $\underline{m} \perp \underline{q}$ és $\underline{p} \uparrow\uparrow \underline{q}$ miatt $m^2 = pq$.

4. A magasságtétel megfordítása

Ha egy háromszögnek van olyan oldala, amelyhez tartozó magasság a háromszögön belül halad és mértani közepe a másik két oldal ezen oldalon lévő merőleges vetületének, akkor a háromszög derékszögű és ez az oldal az átfogója.

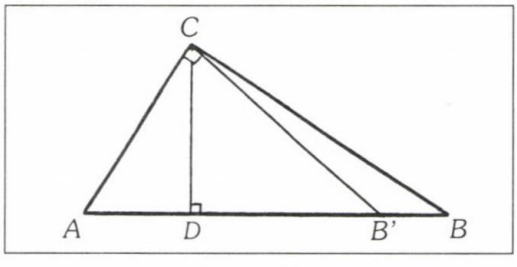
E tétel bizonyításához tegyük fel, hogy az ABC háromszög C csúcsából húzott magasságának D talppontja az $\overline{AB}$ oldal belső pontja, és teljesül a $CD^2 = AD \cdot DB$ egyenlőség.

1. bizonyítás

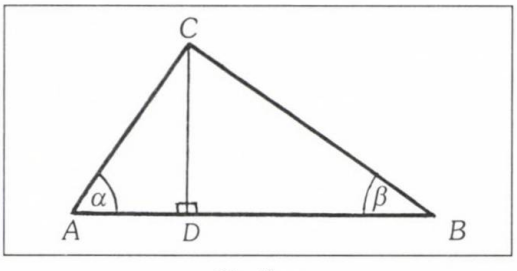
Legyen B' az $\overline{AC}$ oldalra C-ben állított merőleges és az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenes metszéspontja *(19. ábra)*. Ekkor az $AB'C$ derékszögű háromszögre a magasságtétel szerint $CD^2 = AD \cdot DB'$, amit a feltételi egyenlőséggel összehasonlítva $DB = DB'$, azaz $B' \equiv B$ adódik, s így az ABC háromszög C-nél derékszögű, és $\overline{AB}$ az átfogója.

2. bizonyítás

A feltételi egyenlőséget átrendezve kapjuk az $AD:CD = CD:BD$ arányt, ami $\overline{AD} \perp \overline{CD}$ és $\overline{BD} \perp \overline{CD}$ miatt azt jelenti, hogy az ACD és CBD háromszögek hasonlók egymáshoz *(20. ábra)*. E hasonlóság során a megfelelő szögekre $DCB\sphericalangle = DAC\sphericalangle = \alpha$ és $ACD\sphericalangle = CBD\sphericalangle = \beta$ teljesül. Ennek alapján az ACD (vagy a BCD)



19. ábra



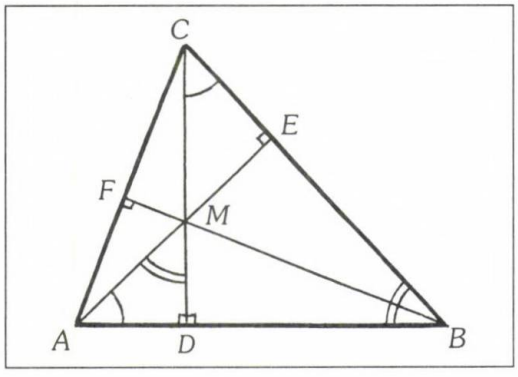
20. ábra

háromszög belső szögeinek összegéből $\alpha + \beta = 90^\circ$ adódik, ami azt jelenti, hogy az ABC háromszög a C csúcsnál derékszögű és $\overleftrightarrow{AB}$ az átfogója.

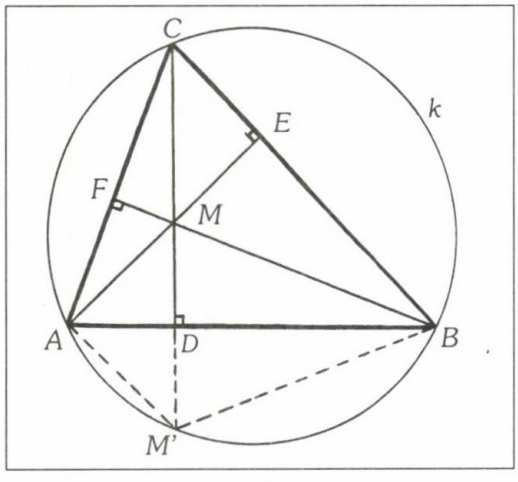
5. A magasságtétel általánosítása

Legyen ABC egy tetszőleges háromszög, amelyre a magasságok $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BC}$ és $\overleftrightarrow{CA}$ egyeneseken lévő talppontjait jelölje D, E és F *(21. ábra)*. Ha M az ABC háromszög magasságpontja, akkor az $\overline{AB}$ oldalra vonatkozó általános magasságtétel $AD \cdot BD = CD \cdot DM$ alakú.

Azonnal észrevehető, hogy ha az ABC háromszög C-nél derékszögű, akkor $M \equiv C$, s így az ismert $CD^2 = AD \cdot BD$ összefüggéshez jutunk vissza.



21. ábra



22. ábra

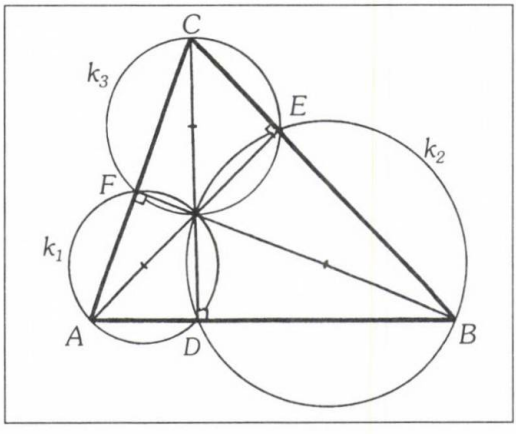
Az általános magasságtétel hasonlóképpen megfogalmazható a másik két oldalra is. A továbbiakban előbb feltételezzük, hogy az ABC háromszög hegyesszögű, és az $\overline{AB}$ oldalra kimondott általános magasságtételre három bizonyítást adunk.

1. bizonyítás

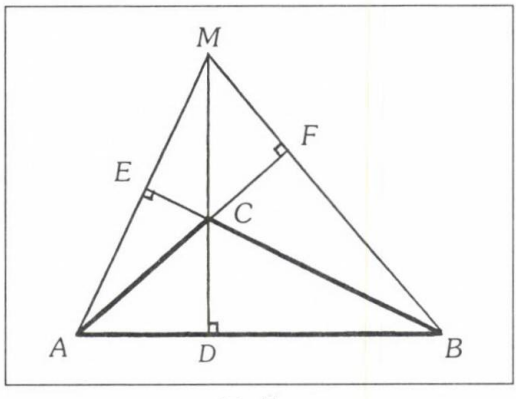
A BDC és MAD háromszögek hasonlók egymáshoz *(21. ábra)*, mivel mindkettő derékszögű, és a megfelelő hegyes szögek merőleges szárú szögpárt alkotnak. E hasonlóság miatt $BD:CD = DM:AD$, amiből a bizonyítandó állítás egyszerű átalakítással megkapható.

2. bizonyítás

Az M magasságpontnak az $\overleftrightarrow{AB}$ egyenesre vonatkozó M' tükörképe rajta van az ABC há-



23. ábra



24. ábra

romszög k körülírt körén *(22. ábra)*, melynek az $\overline{AB}$ és $\overline{CM'}$ szakaszok húrjai, s ezek D metszéspontjának a k körülírt körre vonatkozó hatványából $AD \cdot BD = CD \cdot DM' = CD \cdot DM$ kapható.

3. bizonyítás

Induljunk ki a bizonyítandó állítás bal oldalából, és használjuk fel az A pontnak a $k_2(\overline{BM})$ és $k_2(\overline{CM})$ körökre, valamint a C pontnak a $k_1(\overline{AM})$ körre vonatkozó hatványát, továbbá a Pitagorasz-tételt az ACD derékszögű háromszögre *(23. ábra)*. Ekkor az alábbi hosszú számolás után a bizonyítandó állítás jobb oldalát kapjuk:

$$AD \cdot BD = AD(AB - AD) =$$
$$= AB \cdot AD - AD^2 = AM \cdot AE - AD^2 =$$
$$= AC \cdot AF - AD^2 = AC(AC - CF) - AD^2 =$$
$$= (AC^2 - AD^2) - AC \cdot CF =$$
$$= CD^2 - CM \cdot CD = CD(CD - CM) =$$
$$= CD \cdot DM.$$

A tompaszögű háromszög esetéhez az első két bizonyításon nem kell változtatni, míg a harmadik bizonyításban leírt számolásban a C és M, valamint az E és F pontok felcserélendők *(24. ábra)*.

Irodalom

[1] Hajós György: Bevezetés a geometriába; Tankönyvkiadó Budapest, 1966.

[2] Pelle Béla: Geometria; Tankönyvkiadó Budapest, 1974.

[3] A. M. Fraedrich: Die Satzgruppe des Pythagoras; BI-Wiss.-Verlag, 1995.

Pályázati felhívás

az Európai Unió SOCRATES oktatási együttműködési programjának COMENIUS 2.2 (külföldi továbbképzések pedagógusoknak) akciójában való részvételre

A COMENIUS 2.2 akció célja az oktatók készségeinek fejlesztése, a szakmai kompetenciák javítása nemzetközi környezetben. *Az akció 1-4 hetes, az Európai Unió valamely tagállamában tartott intenzív kurzusokon vagy szakmai és módszertani továbbképzési programokon való részvételhez nyújt egyéni ösztöndíjas támogatást pedagógusoknak.*

A program keretében kétféle típusú továbbképző kurzusra lehet pályázatot benyújtani:

a) általános tanártovábbképző kurzusokra, illetve (1-4 hetes kurzusok pályázhatók)

b) nyelvtanár-továbbképző kurzusokra (minimum 2, maximum 4 hetes kurzusok)

A támogatottak köre:
általános tanártovábbképző kurzusok esetén: óvodai nevelők – általános és középiskolai tanárok – iskolaigazgatók – pályaválasztási tanácsadók = szaktanácsadók – oktatási tanácsadók – tantervfejlesztők – iskolával kapcsolatban álló nevelési szakemberek.
nyelvtanár-továbbképző kurzusok esetén: nyelvtanárok, szaktárgyukat idegen nyelven oktató pedagógusok, nyelvi átképzésben résztvevő tanárok, nyelvtanárok képzésében résztvevő egyetemi, főiskolai oktatók. Csak olyan tanárok pályázhatnak, akik az adott nyelvet legalább 3 évig, általános iskolai nyelvtanárok esetében legkevesebb heti 3 órában, középiskolai nyelvtanárok esetében heti 6 órában tanították.

Támogatások megpályázhatók a tanfolyamdíj, az utazási és szállásköltség, valamint olyan más megélhetési költségek fedezésére, melyek a szakmai továbbképzési tevékenységgel közvetlen összefüggésben merülnek fel. Ennek a támogatásnak a pontos mértéke a látogatott tanfolyam típusától, időtartamától, valamint a résztvevők tényleges utazási költségeitől függ.

A támogatást nyert pályázatok megvalósítására *2002. június 1-jétől 2003. május 31*-ig kerülhet sor. A pályázatok beküldési határideje:

2002. március 1. (postabélyegző dátuma)

Pályázni csak az Európai Unió valamely hivatalos nyelvén lehet. A pályázatokat 2 példányban, ajánlott küldeményként, postai úton kérjük eljuttatni a SOCRATES Nemzeti Iroda címére.

Az akció részletes leírását és a további feltételeket tartalmazó Socrates pályázati útmutató, valamint a pályázati űrlap a munkanyelv megjelölésével a SOCRATES Nemzeti Irodánál igényelhető, illetve az iroda honlapjáról letölthető.

SOCRATES Nemzeti Iroda
1082 Budapest Üllői út 82.
Postacím: 1438 Budapest 70, Pf.: 510
Telefon: 210 97 00, fax: 210 97 01
E-mail: info@tpf.hu

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2002. március 31.

190. Hat valós számot felírtunk egy körvonalra úgy, hogy bármelyik szám az óramutató járásával megegyező irányban őt követő két szám különbségének abszolút értékével egyenlő. Melyek a körvonalra írt számok, ha tudjuk, hogy összegük 1?

191. Az első 2002 darab pozitív egész szám halmazából válasszuk ki azt a legnagyobb elemszámú részhalmazt, amely részhalmaz bármely két elemének különbsége összetett szám!

192. Mutassuk meg, hogy az n pozitív egész szám pontosan akkor áll elő két háromszögszám összegeként, ha $4n+1$ előáll két négyzetszám összegeként!

193. Az ABC háromszögben M a magasságpont, F a BC oldal felezőpontja, P pedig az A csúcsnak a köréírt kör középpontjára vonatkozó tükörképe. Mutassuk meg, hogy M, F és P egy egyenesre illeszkednek, és F felezi az MP szakaszt!

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

194. Legfeljebb hány részre osztja a koordinátasíkot 2002 darab, a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvény grafikonja?

Feladatmegoldások (175-179., 164. feladatok)

175. Van 68 darab páronként különböző tömegű érménk. Ki lehet-e választani közülük a legnehezebbet és a legkönnyebbet egy kétkarú mérleg segítségével, ha legfeljebb 100 mérésre van lehetőségünk?

Megoldás: 100 mérés elegendő a kiválasztáshoz. A 68 érméből alakítsunk ki 34 párt véletlenszerűen, ezek után hasonlítsuk össze az egyes párokban levő érméket. Minden egyes ilyen mérésnél a nehezebbet tegyük jobbra, a könnyebbet balra. Így 34 méréssel két 34 elemű csoportra osztottuk az érméket, N a nehezebb, K a könnyebb érmék csoportja. Könnyen látható, hogy a legnehezebb érme N-ben, a legkönnyebb érme K-ban van. Ezután N-ből 33 „kieséses" méréssel ki tudjuk választani a legnehezebbet úgy, hogy mindig két érmét hasonlítunk össze, és a nehezebbet a mérlegen hagyjuk, a könnyebbet pedig kicseréljük egy, az összehasonlításban még részt nem vevő érmére. Az utolsó összehasonlítás után a legnehezebb érme marad a mérlegen. Hasonló módon tudjuk kiválasztani 33 méréssel K-ból a legkönnyebb érmét.

A szükséges mérések száma ekkor $34+33+33=100$, tehát a kiválasztás ilyen módon 100 mérésből megvalósítható.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: A fenti gondolatmenethez hasonlóan belátható, hogy n érme esetén, ha $n=2k$, akkor $3k-2$, ha $n=2k+1$, akkor $3k$ méréssel ki tudjuk választani az érmék közül a legnehezebbet és a legkönnyebbet.

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely
Udvari Tibor, Baja

A megoldók száma: 15.

176. Tekintsük az első n darab pozitív egész szám halmazának összes nem üres részhalmazát. Minden egyes részhalmaz esetén számítsuk ki a részhalmazba tartozó számok reciprokának szorzatát. Határozzuk meg ezen szorzatok összegét!

I. megoldás: Jelöljük S_k-val az első k darab pozitív egész szám összes nem üres részhalmazához tartozó reciprok szorzatok összegét. Könnyen látható, hogy fennáll az alábbi rekurzív összefüggés:

$$S_k = S_{k-1} + \frac{1}{k}S_{k-1} + \frac{1}{k}.$$

Mindkét oldalhoz 1-et adva, majd elvégezve az összevonásokat:

$$S_k + 1 = \frac{k+1}{k}(S_{k-1}+1).$$

Ezeket felírva $k=2$-től $k=n$-ig:

$$S_2 + 1 = \frac{3}{2}(S_1+1)$$
$$S_3 + 1 = \frac{4}{3}(S_2+1)$$
$$\vdots$$
$$S_n + 1 = \frac{n+1}{n}(S_{n-1}+1).$$

A fenti egyenleteket összeszorozva, majd a lehetséges egyszerűsítéseket elvégezve kapjuk, hogy

$$S_n + 1 = \frac{n+1}{2}(S_1+1).$$

Mivel $S_1=1$, ezért $S_n=n$.

Molnár István, Gyula

II. megoldás: Tekintsük a

$$P(x) = \prod_{k=1}^{n}\left(x+\frac{1}{k}\right)$$

polinomot. Könnyen látható, hogy a keresett S_n összegre nézve: $S_n = P(1) - 1$. Így tehát

$$S_n = \prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k}\right) - 1 = \prod_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k} - 1 = n+1-1 = n.$$

Dályay Pál Péter, Szeged
Kiss Géza, Kisújszállás
Zsidó Nagy György, Kolozsvár

Megjegyzés: A feladatot megoldók többsége a legkézenfekvőbb módszert, a teljes indukciós bizonyítást választotta. Ennek közlésétől most eltekintünk.

A megoldók száma: 15.

177. Legyenek x, y, z olyan nem negatív valós számok, amelyekre

$$x^4 + y^4 + z^4 \le 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2).$$

Mutassuk meg, hogy ekkor az

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 2(xy + yz + zx).$$

egyenlőtlenség is teljesül! Igaz-e az állítás megfordítása?

Megoldás: Ekvivalens átalakításokat végezve, és kihasználva, hogy x, y és z nem negatívak

$$x^4 + y^4 + z^4 \le 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \le$$
$$\le 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 8xyz\,(x + y + z)$$
$$x^4 + y^4 + z^4 + 2(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) \le$$
$$\le 4(x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2) + 8xyz\,(x + y + z)$$
$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 \le (2(xy + yz + zx))^2.$$

Mivel a négyzetre emelt kifejezések nem negatívak, ezért

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 2(xy + yz + zx).$$

Ezzel az állítást beláttuk.

Az állítás megfordítása nem igaz, ugyanis például $x=y=1$ és $z=3$ esetén $11 = 1^2+1^2+3^2 \le$ $\le 2(1\cdot 1+1\cdot 3+3\cdot 1)=14$, viszont $1^4 + 1^4 + 3^4 = 83$ és $2(1^2\cdot 1^2 + 1^2\cdot 3^2 + 3^2\cdot 1^2) = 38$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 15.

178. Legyen P az ABC háromszög egy belső pontja, és jelölje rendre x, y és z a P pontnak a BC, AC és AB oldalegyenesektől vett távolságát. A háromszög belsejének mely P pontjára lesz az xyz szorzat maximális?

Megoldás: Legyen $a=BC$, $b=AC$, $c=AB$, és jelölje T a háromszög területét. Ezen jelölésekkel a háromszög területének kétszerese

$$2T = ax + by + cz.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$ax \cdot by \cdot cz \le \left(\frac{ax+by+cz}{3}\right)^3 = \left(\frac{2T}{3}\right)^3 = \frac{8T^3}{27},$$

ahonnan

$$xyz \le \frac{8T^3}{27abc},$$

Ez utóbbi egyenlőtlenség jobb oldala állandó, ezért xyz pontosan akkor maximális, ha

$$ax = by = cz,$$

azaz ha a P-ből a csúcsokhoz húzott szakaszok három egyenlő területű háromszögre osztják az eredeti háromszöget. Könnyen bizonyítható, hogy ezzel a tulajdonsággal csak a háromszög súlypontja rendelkezik, vagyis az xyz szorzat pontosan akkor maximális, ha P a háromszög súlypontja.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 16.

179. Egy egész együtthatós legalább elsőfokú polinomnak gyöke az 1 és a 2. Igaz-e, hogy van a polinomnak olyan együtthatója, amelyik kisebb –1-nél?

I. megoldás: Legyen a feltételeknek megfelelő egész együtthatós polinom

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0.$$

1 és 2 gyöke a polinomnak, ezért

$$a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 + a_0 = 0 \quad (1)$$

és $2^n a_n + 2^{n-1} a_{n-1} + \ldots + 2a_1 + a_0 = 0$. (2)

Ad abszurdum tegyük fel, hogy a polinomnak nincs –1-nél kisebb együtthatója. Mivel a polinom legalább elsőfokú, és teljesül (1), ezért a negatív együtthatók mindegyike –1-gyel egyenlő. Jelölje $k(>0)$ a negatív együtthatók számát. (1) miatt a pozitív együtthatók összege is k. Ezt figyelembe véve alakítsuk (2)-t úgy, hogy a negatív együtthatójú tagokat vigyük át a jobb oldalra, a bal oldalon maradt pozitív együtthatójú tagokat pedig bontsuk fel 1 együtthatójú kettőhatványok összegére. Ezzel az átalakítással

$$2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \ldots + 2^{\alpha_k} = 2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + \ldots + 2^{\beta_k}, \quad (3)$$

ahol $\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_k \ge 0$, $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k \ge 0$ és $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_k\} \cap \{\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_k\} = \varnothing$.

A következőkben belátunk egy segédtételt.

Segédtétel: Ha

$$2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \ldots + 2^{\alpha_m} = 2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + \ldots + 2^{\beta_n},$$

ahol mindegyik α_i és β_j egész szám úgy, hogy

$\alpha_1 \ge \alpha_2 \ge \ldots \ge \alpha_m \ge 0$, $\beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_n \ge 0$ és $\{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m\} \cap \{\beta_1, \beta_2 \ldots, \beta_n\} = \varnothing$, akkor $m \ge 2n$.

Bizonyítás: A bizonyítást n szerinti teljes indukcióval végezzük.

Ha $n=1$, akkor $2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \ldots + 2^{\alpha_m} = 2^{\beta_1}$. Mivel $\beta_1 \notin \{\alpha_1, \alpha_2 \ldots, \alpha_m\}$, ezért a bal oldalon legalább két tagnak kell állnia, azaz $m \ge 2$.

Tegyük fel, hogy valamely $n \ge 1$ esetén teljesül az állítás, és legyen

$$2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \ldots + 2^{\alpha_m} = 2^{\beta_1} + 2^{\beta_2} + \ldots + 2^{\beta_n} + 2^{\beta_{n+1}}.$$

$\alpha_m > \beta_{n+1}$ nem teljesülhet, ugyanis ekkor mindegyik tag osztható lenne 2^{α_m}-mel, kivéve $2^{\beta_{n+1}}$-et. Ennélfogva $\beta_{n+1} > \alpha_m$. Azon $2^{\alpha_i} - k$ összege, amelyekre $\beta_{n+1} > \alpha_i$ osztható $2^{\beta_{n+1}}$-gyel, amiből adódik, hogy van olyan j index, hogy

$$2^{\alpha_{j+1}} + 2^{\alpha_{j+2}} + \ldots + 2^{\alpha_m} = 2^{\beta_{n+1}},$$

ahol $m - j \geq 2$. Így viszont

$$2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \ldots + 2^{\alpha_j} = 2^{\beta_2} + \ldots + 2^{\beta_n}.$$

Az indukciós feltevésből adódóan $j \geq 2n$, ezért

$$m = j + (m - j) \geq 2n + 2 = 2(n+1).$$

Ezzel beláttuk a segédtételt.

A segédtétel értelmében (3)-ban $k \geq 2k$, ami ellentmond annak, hogy k pozitív egész szám. Azon feltevésünk tehát, miszerint a polinomnak nincs –1-nél kisebb együtthatója, ellentmondásra vezetett, így a feladat kérdésére a válasz igenlő.

Dályay Pál Péter (Szeged), Koncz Levente (Budapest), Rakonczai György (Budapest), Schmidt Edit (Budapest) megoldása alapján

II. megoldás: Tegyük fel, hogy létezik olyan egész együtthatós polinom, melynek 1 és 2 gyökei, valamint nincs –1-nél kisebb együtthatója. Legyen a minimális fokszámú ilyen polinom fokszáma $n+2$. A polinom alakja ekkor

$$(x^2 - 3x + 2)(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0).$$

A tagonkénti szorzásokat elvégezve a második tényező együtthatóira nézve a következő egyenlőtlenségrendszerhez jutunk abból a feltevésből, hogy mindegyik együttható legalább –1:

$$\begin{aligned}
2a_0 \geq -1 &\Rightarrow a_0 \geq \frac{-1}{2} \\
2a_1 - 3a_0 \geq -1 &\Rightarrow a_1 - a_0 \geq \frac{-3}{4} \\
2a_2 - 3a_1 + a_0 \geq -1 &\Rightarrow a_2 - a_1 \geq \frac{-7}{8} \\
&\vdots \\
2a_n - 3a_{n-1} + a_{n-2} \geq -1 &\Rightarrow a_n - a_{n-1} \geq -\frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.
\end{aligned}$$

(Itt a jobb oldali egyenlőtlenségeket úgy kaptuk, hogy mindig figyelembe vettük az előző sor jobb oldali egyenlőtlenségét.)

x^{n+2} együtthatója a_n, míg x^{n+1}-é $a_{n-1} - 3a_n$. Mivel ezek sem lehetnek –1-nél kisebbek, ezért figyelembe véve a fenti egyenlőtlenségrendszer utolsó jobb oldali egyenlőtlenségét kapjuk, hogy

$$a_n \leq \frac{2^{n+2} - 1}{2^{n+2}} < 1.$$

Mivel polinomunk minimális fokszámú, ezért a fenti egyenlőtlenségből az adódik, hogy a_n negatív egész szám.

Vizsgáljuk most meg a fenti egyenlőtlenségrendszer egyenlőtlenségeit. Az elsőből adódik, hogy $a_0 \geq 0$. Ha a bal oldalon álló első egyenlőtlenség háromszorosához hozzáadjuk a bal oldalon álló második egyenlőtlenség kétszeresét, kapjuk, hogy $4a_1 \geq -5$, amiből $a_1 \geq 0$. Ezt az eljárást folytatva mindegyik együtthatóra azt kapjuk, hogy nem negatív, utoljára a_n-re azt, hogy

$$a_n \geq -\frac{2^{n+1} - 1}{2^{n+1}}.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a_n sem lehet negatív, ami ellentmond korábban kapott eredményünknek.

Kaptuk tehát, hogy olyan polinom, amelyre a feladat feltételei teljesülnek és nincs –1-nél kisebb együtthatója, nem létezik.

Vörös Zoltán, Tiszavasvári

A megoldók száma: 7.

164. Oldjuk meg az egész számok halmazán az

$$y^k = x(x+1)(x+2)\ldots(x+m)$$

egyenletet, ahol m pozitív egész, és $k \geq m + 1$! (A **145.** feladat egy lehetséges általánosítása.)

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

Előzetes megjegyzés: A **145.** feladat egy általánosításaként kitűzött probléma lényegesen nehezebb, mint a jelen rovat keretei között kitűzhető problémák, feladatok. Azért döntöttünk mégis úgy, hogy a problémát ezen lap hasábjain is kitűzzük, mert egyrészt már megoldott problémáról van szó, másrészt egy kis „irodalmazásra" akartuk ösztönözni a rovat aktív olvasóit. A továbbiakban közölt két megoldás tulajdonképpen hivatkozás néhány alapvető jelentőségű tételre.

I. megoldás: Erdős Pál és J. L. Selfridge 1975-ben publikálták a következő tétel bizonyítását (*P. Erdös, L. Selfridge, The products of consecutive integers is never a power,* Illinois J. Math. 19 (1975), 292-301.):

Tétel: Ha n, x, k és l 2-nél nem kisebb természetes számok, akkor az

$$n(n+1)...(n+k-1)=x^l \quad (1)$$

egyenletnek nincs megoldása.

Ezen tétel következménye, hogy az

$$y^k = x(x+1)(x+2)...(x+m) \quad (k \geq m+1)$$

egyenlet megoldásai:

- ha $m=0$, akkor y bármely egész szám lehet, míg $x = y^k$;
- ha $m=1$, akkor a **145.** feladat kapcsán láttuk, hogy $y=0$, $x=0$ vagy $x=-1$, $k>1$ teszőleges;
- ha $m>1$, akkor $y=0$, a lehetséges x értékek pedig: $0, -1, -2, ..., -m$.

Kiss Géza, Kisújszállás
Vörös Zoltán, Tiszavasvári

II. megoldás: Ebben a megoldásban kikerüljük Erdős és Selfridge tételét.

Jelölje $P(a)$ a 2-nél nem kisebb a egész szám legnagyobb prímosztóját.

I. tétel: (J.J. Sylvester-1892., I. Schur-1929.) Ha $n > k \geq 2$ egész számok, akkor

$$P(n(n+1)...(n+k-1)) > k.$$

II. tétel: (N. Saradha $-k \geq 4$ eset; Győry Kálmán $-k \leq 3$ eset)

Az

$$n(n+1)...(n+k-1)) = bx^l \quad (2)$$

egyenletnek a $k=b=l=2$ esettől eltekintve az egyetlen olyan megoldása, amelyre $P(x)>k$: $n=48$, $k=3$, $b=6$, $x=140$, $l=2$ ($48 \cdot 49 \cdot 50 = 6 \cdot 140^2$).

Tegyük fel, hogy az I. megoldásbeli (1) egyenlet megoldható. Ekkor a II. tételben $b=1$, így a tétel miatt $P(x) \leq k$. Ekkor viszont az I. tétel szerint $n \leq k$, azaz

$$n \leq \frac{n+k}{2}.$$

III. tétel: (Bertrand-posztulátum, Csebisev-tétel) Ha n nem kisebb 2-nél, akkor n és $2n$ között van prímszám.

A III. tétel szerint van olyan p prímszám, amelyre $p \leq n+k-1$. Ebből viszont következik, hogy p-nek csupán az első hatványa lehet osztója $n(n+1)...(n+k-1)$-nek. Ezzel ellentmondásra jutottunk, tehát (1)-nek nem létezik megoldása.

Innen a megoldás megegyezik az I. megoldás módszerével.

Vörös Zoltán, Tiszavasvári

Megjegyzés: Azon Kedves Olvasók számára, akik a témában alaposabban el szeretnének mélyülni, ajánljuk a következő monográfia III. fejezetének 2. paragrafusát (125-148.): *Wladislaw Narkiewicz, Classical Problems in Number Theory, Warszawa, 1986.*

A megoldók száma: 2.

A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (175-178.); Dályay Pál Péter, Szeged (175., 176. 2 mód, 177-179.); Fitos László, Esztergom (178.); Kamarás Lajos, Pécs (175-178.); Kiss Géza, Kisújszállás (175-178., 164.); Koncz Levente, Budapest (175-177., 179.); László Sándor, Szombathely (175., 177., 178.); Molnár István, Gyula (175., 176. 2 mód, 177. 2 mód, 178.); Nagy Béla, Sarkad (175-178.); Rakonczai György, Budapest (175-179.); Schmidt Edit, Budapest (175-179.); Schuler László, Budapest (176-179.); Simon József, Csíkszereda (175-178.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (175-179.); Udvari Tibor, Baja (175-178.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (175-179., 164.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (175., 176., 178.).

Pályázati felhívás

az Európai Unió SOCRATES oktatási együttműködési programjának COMENIUS 2.1 akciójában való intézményi részvételre

A COMENIUS 2.1 akció célja olyan nemzetközi együttműködésben megvalósuló projektek támogatása, amelyek hozzájárulnak a tanárok alap- és továbbképzésének fejlesztéséhez.

Pályázásra jogosult intézmények

A projektekben elsősorban a *tanárok alap- és továbbképzésével foglalkozó intézmények vehetnek részt, de bekapcsolódhatnak pedagógiai intézetek, tanügyi tanácsadók, tanfelügyelők továbbképzésével foglalkozó intézmények, valamint közoktatási intézmények is.* A részvételre jogosult intézménytípusok meghatározása az egyes nemzeti hatóságok feladata – országonkénti listájuk megtalálható a SOCRATES Nemzeti Irodánál.

Projekttípusok

- Tanártovábbképző kurzusok létrehozása és lebonyolítása
- Tantervfejlesztés a tanárok alapképzésében
- Tanárjelöltek egyéni ösztöndíjas részképzésének megvalósítása
- Tanítási módszerek, pedagógiai stratégiák kidolgozása speciális tanulási igényű csoportok számára (etnikai kisebbségek, fogyatékos vagy szociálisan hátrányos helyzetű tanulók stb.)

A projekteknek a fenti tevékenységek legalább egyikét kell megvalósítaniuk, de a projekten belül ötvözhetik is azokat. A projekteknek nem kell szükségszerűen a tanárképzés egyetlen szakaszára koncentrálniuk: azok a projektek, amelyek az alap- vagy továbbképzés egészének fejlesztésével kívánnak foglalkozni, szintén támogatást élveznek.

A projektek felépítése

A projektek létrejöttéhez a SOCRATES programban részt vevő legalább 3 ország (legalább egy az EU tagja) 1-1 a programban való részvételre jogosult intézményének együttműködésére van szükség. Az egyik intézménynek koordinátori szerepet kell vállalnia.

Pénzügyi feltételek

A projektek időtartama 1, 2 vagy 3 év lehet. A pénzügyi támogatás a projekt típusától függően évi 20-100 ezer euró, amely minden esetben kiegészítő támogatás, vagyis az intézményeknek más pénzügyi forrásokat is igénybe kell venniük – általában a projekt összköltségvetésének 60-40 %-át kell saját forrásból fedezniük.

A pályázatok beküldési határideje:
2002. március 1. (postabélyegző dátuma)

Pályázni csak az Európai Unió valamely hivatalos nyelvén lehet. **A pályázatot a koordináló intézmény juttatja el Brüsszelbe az Európai Bizottsághoz, a partnerintézmények pedig 1-1 példányt véleményezésre megküldenek saját nemzeti irodájukhoz.**

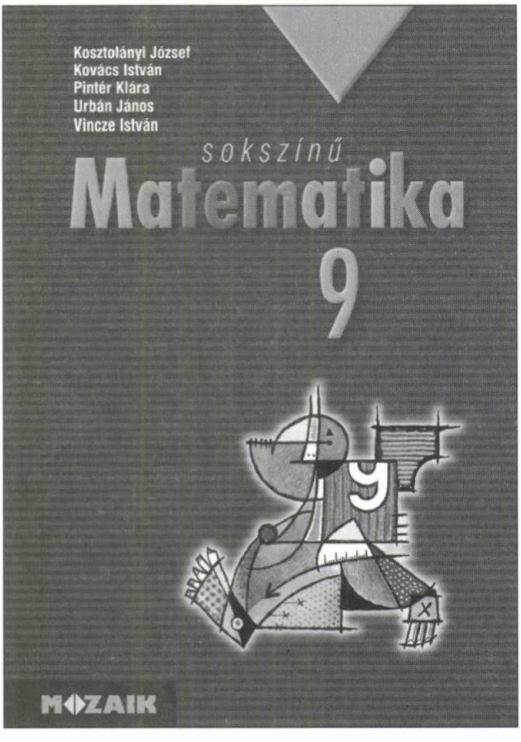
További információ:

SOCRATES Nemzeti Iroda
1438 Budapest 70, Pf.: 510.
Telefon: 06 (1) 210-9700
Fax: 06 (1) 210-9701
E-mail: info@tpf.hu
Internet: http://www.tpf.iif.hu/socrates

Gondolatok a Mozaik új matematikakönyveiről

Sokszínű matematika 5–12. osztály

A matematikatanár feladata sokkal több, mint a tárgyi tudás közlése, módot kell találnia annak értő alkalmaztatására is. A gondolkodás fejlesztése nem merülhet ki a formalizmusban, nemcsak axiómákból, definíciókból és bizonyításokból áll. Teret kell engedni a tapasztalás, az önálló felismerés fogalomformáló erejének is. Egy könyv mindezeket önmagában nem képes megteremteni, de egy tanítványaiért felelősséget érző tanár számára jó alapot és segítséget adhat a munkához. Kívánjuk, hogy a Sokszínű matematika tankönyvcsalád legyen hasznos társa az új évezrednek induló, matematikát tanító pedagógusoknak.

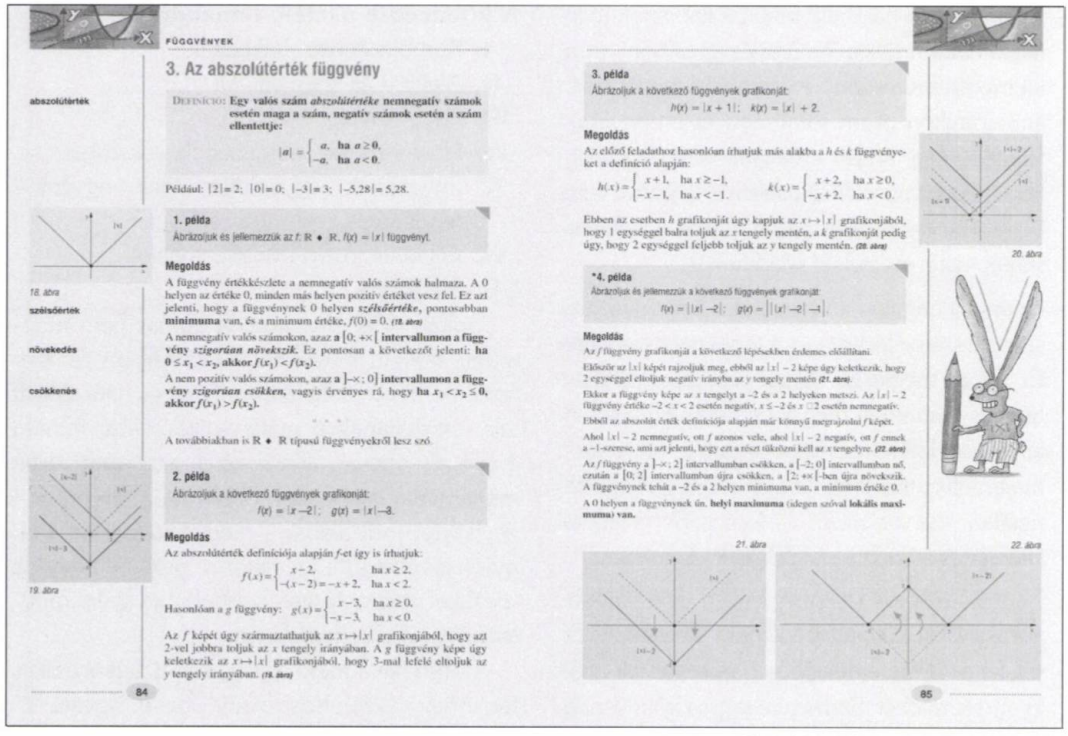


„Ne próbáljuk kielégíteni a hiúságunkat azzal, hogy nagyon sok mindenre tanítjuk meg őket. Ébresszük fel tudásszomjukat. Elegendő megnyitnunk az értelmüket, nem szabad túlterhelnünk őket. Csak egy szikrát csiholjunk. Ha elég gyúlékony az anyag, akkor majd tüzet fog" – írja Anatole France.

Mindannyinkban él valamilyen emlék iskoláskorunkból, amikor otthon a kezünkbe vettük a tankönyvet, azt remélve, hogy hatékony segítséget kapunk az órán elhangzott problémák megoldásához. Voltak tantárgyak, amelyek jellegüknél fogva elsősorban lexikális ismereteinket gyarapították. Az óra anyagát a tankönyvből fel lehetett idézni, hiszen a tanári magyarázat is arra épült. A lecke kitöltötte az órai munkát, a feladatok pedig alapot szolgáltattak az otthoni gyakorláshoz és a megtanulandó anyagrészek rögzítéséhez is.

Vannak azonban olyan tárgyak – talán leginkább a matematika –, amelyek tankönyveiről csak halvány emlékképeink maradtak. Ugyanakkor ma is gyakran emlegetünk elhíresült feladatgyűjteményeket. Ki ne hallott volna a „Laricsevről"? vagy az érettségin használt „zöld könyvről?" Vajon mi az oka, hogy velük szemben a tankönyvek a feledés homályába vesztek?

Pólya György így ír erről: „Minden ismeretünknek tárgyi tudás és gondolkodási készség az alapja. Ha valódi és alapos ismeretünk van a matematikai munka bármely fokáról, legyen az elemi vagy felső fokú, kétségtelenül világossá válik, hogy a matematikában a gondolkodási készség sokkal fontosabb, mint a tárgyi ismeretek elsajátítása. Ennélfogva a középiskolában



FÜGGVÉNYEK

3. Az abszolútérték függvény

abszolútérték

DEFINÍCIÓ: **Egy valós szám *abszolútértéke* nemnegatív számok esetén maga a szám, negatív számok esetén a szám ellentettje:**

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{ha } a \geq 0, \\ -a, & \text{ha } a < 0. \end{cases}$$

Például: $|2| = 2$; $|0| = 0$; $|-3| = 3$; $|-5{,}28| = 5{,}28$.

1. példa

Ábrázoljuk és jellemezzük az $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x|$ függvényt.

Megoldás

A függvény értékkészlete a nemnegatív valós számok halmaza. A 0 helyen az értéke 0, minden más helyen pozitív értéket vesz fel. Ez azt jelenti, hogy a függvénynek 0 helyen ***szélsőértéke***, pontosabban **minimuma** van, és a minimum értéke, $f(0) = 0$. *(18. ábra)*

18. ábra

szélsőérték

növekedés

csökkenés

A nemnegatív valós számokon, azaz a $[0; +\infty[$ **intervallumon a függvény *szigorúan növekszik***. Ez pontosan a következőt jelenti: **ha** $0 \leq x_1 < x_2$, **akkor** $f(x_1) < f(x_2)$.

A nem pozitív valós számokon, azaz a $]-\infty; 0]$ **intervallumon a függvény *szigorúan csökken***, vagyis érvényes rá, hogy **ha** $x_1 < x_2 \leq 0$, **akkor** $f(x_1) > f(x_2)$.

A továbbiakban is $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ típusú függvényekről lesz szó.

2. példa

Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

$$f(x) = |x-2|; \quad g(x) = |x|-3.$$

Megoldás

Az abszolútérték definíciója alapján f-et így is írhatjuk:

$$f(x) = \begin{cases} x-2, & \text{ha } x \geq 2, \\ -(x-2) = -x+2, & \text{ha } x < 2. \end{cases}$$

Hasonlóan a g függvény: $g(x) = \begin{cases} x-3, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x-3, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$

Az f képét úgy származtathatjuk az $x \mapsto |x|$ grafikonjából, hogy azt 2-vel jobbra toljuk az x tengely irányában. A g függvény képe úgy keletkezik az $x \mapsto |x|$ grafikonjából, hogy 3-mal lefelé eltoljuk az y tengely irányában. *(19. ábra)*

19. ábra

3. példa

Ábrázoljuk a következő függvények grafikonját:

$$h(x) = |x+1|; \quad k(x) = |x| + 2.$$

Megoldás

Az előző feladathoz hasonlóan írhatjuk más alakba a h és k függvényeket a definíció alapján:

$$h(x) = \begin{cases} x+1, & \text{ha } x \geq -1, \\ -x-1, & \text{ha } x < -1. \end{cases} \qquad k(x) = \begin{cases} x+2, & \text{ha } x \geq 0, \\ -x+2, & \text{ha } x < 0. \end{cases}$$

Ebben az esetben h grafikonját úgy kapjuk az $x \mapsto |x|$ grafikonjából, hogy 1 egységgel balra toljuk az x tengely mentén, a k grafikonját pedig úgy, hogy 2 egységgel feljebb toljuk az y tengely mentén. *(20. ábra)*

20. ábra

***4. példa**

Ábrázoljuk és jellemezzük a következő függvények grafikonját:

$$f(x) = ||x|-2|; \quad g(x) = ||x|-2|-1.$$

Megoldás

Az f függvény grafikonját a következő lépésekben érdemes előállítani.

Először az $|x|$ képét rajzoljuk meg, ebből az $|x|-2$ képe úgy keletkezik, hogy 2 egységgel eltoljuk negatív irányba az y tengely mentén *(21. ábra)*.

Ekkor a függvény képe az x tengelyt a -2 és a 2 helyeken metszi. Az $|x|-2$ függvény értéke $-2 < x < 2$ esetén negatív, $x \leq -2$ és $x \geq 2$ esetén nemnegatív.

Ebből az abszolút érték definíciója alapján már könnyű megrajzolni f képét.

Ahol $|x|-2$ nemnegatív, ott f azonos vele, ahol $|x|-2$ negatív, ott f ennek a -1-szerese, ami azt jelenti, hogy ezt a részt tükrözni kell az x tengelyre. *(22. ábra)*

Az f függvény a $]-\infty; 2]$ intervallumban csökken, a $[-2; 0]$ intervallumban nő, ezután a $[0, 2]$ intervallumban újra csökken, a $[2; +\infty[$-ben újra növekszik. A függvénynek tehát a -2 és a 2 helyen minimuma van, a minimum értéke 0.

A 0 helyen a függvénynek ún. **helyi maximuma** (idegen szóval **lokális maximuma**) **van.**

21. ábra

22. ábra

Mintaoldal a Matematika 9. tankönyvből

csakúgy, mint bármely más szinten, bizonyos mennyiségű tárgyi tudás megtanításán kívül bizonyos irányú gondolkodási készséget is fejlesztenünk kell."

Tehát nem elég „megtanulni" egy módszert, azt alkalmazni is kell. Ehhez pedig újabb és újabb feladatokra van szükség, ezért a diákok leginkább a feladatgyűjteményekkel találkoznak matematikai tanulmányaik során. No, de a módszerek megértése, a fogalmak rögzítése nem könnyű, nem biztos, hogy az órai magyarázat alapján minden diák világos és egyértelmű ismeretekhez jut. Akkor miért nem forgattuk sűrűbben a tankönyveket?

Lehet ennek egy nagyon prózai oka is. Sok pedagógus úgy gondolja, hogy a tankönyvi feladatokat nem szerencsés felhasználni, mert a tanuló „csak" kiolvassa a megoldást, és ez nem igényel kreativitást. Ezért órán általában olyan feladatok kerülnek elő, amelyek megoldása a könyvekben nem található meg. Így nincs értelme átolvasni a leckét, hiszen a tankönyvbeli rutinok, algoritmusok nem ismerősek.

A most útjára induló Sokszínű matematika tankönyvcsalád tervezése során e gondolatok alapján fogalmazódott meg, hogy milyen tankönyvet szeretnénk a kollégák és tanítványaik kezébe adni. A legfontosabb szempontok a következők voltak:

– A könyv feleljen meg a kerettantervnek. Természetesen az egyes iskolákban az óraszámok eltérhetnek, hiszen ez a helyi pedagógiai programok függvénye. Ezért legyen egyértelmű mindenkinek a megtanítandó tananyag, ugyanakkor használhassák a könyvet az alapóraszám felett tanítók is.

– Az egyes fogalmak, témakörök ismertetése legyen minél egyszerűbb, kerülve a terjengős magyarázatokat. A mintapéldák az anyag elmélyítését szolgálják.

– A tankönyvet használó tanárok kapjanak megfelelő háttéranyagot az órai és az otthoni munka megszervezéséhez. A fejezetekhez szervesen kapcsolódjon olyan minőségű és mennyiségű feladatanyag, amely a begyakorlást és a megfelelő algoritmusok kialakítását is lehetővé teszi, de köztük a jobb képességű diákok is találhassanak nekik megfelelő feladatokat.

– Az anyag hagyjon időt a tanulás klasszikus fázisaira: a szemlélődésre és a tapasztalatszerzésre. Ez adhat megfelelő alapot a fogalomalkotáshoz, és teremtheti meg a tantárgy lényegét jelentő gondolkodásmódot. Derüljön ki, hogy a matematika története az emberiség kultúrtörténetének szerves része, és fontosabb pillanatai jelenjenek is meg a megfelelő fejezetekben.

– Nem utolsósorban a könyv legyen „szimpatikus" a megcélzott korosztály számára. Feladatai keltsék fel a diákok érdeklődését, és sarkallják önálló munkára őket. Szerkezete legyen könnyen áttekinthető, küllemében legyen esztétikus.

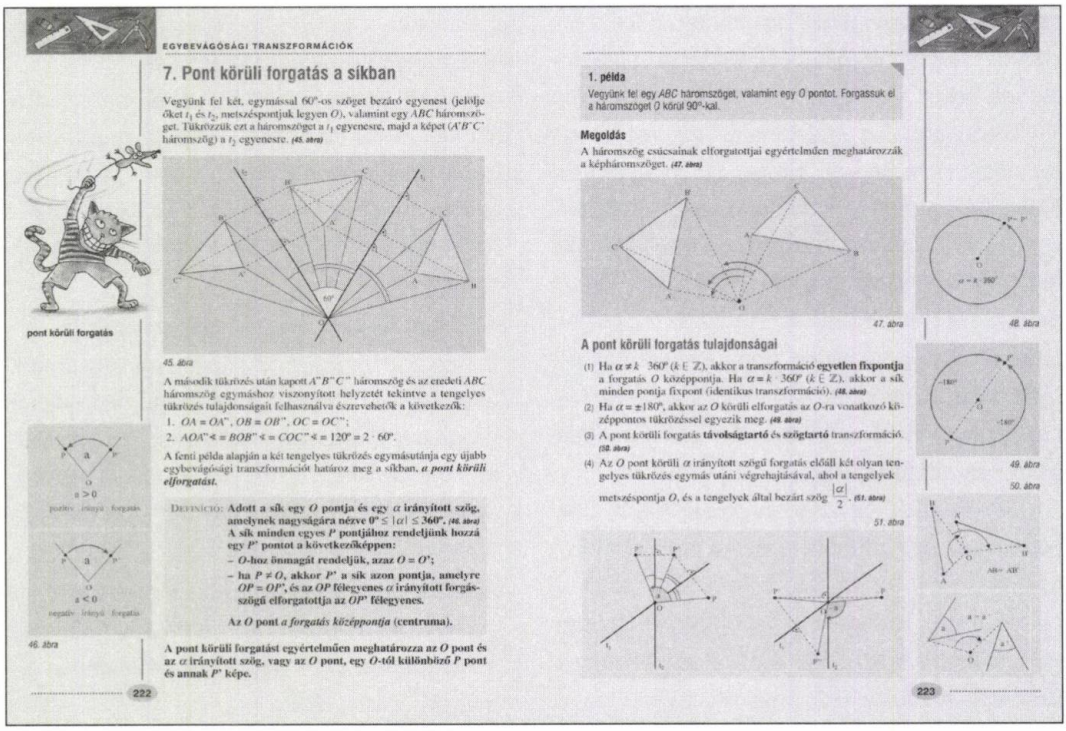
A kilencedik osztály témakörei:

I. Kombinatorika, halmazok
II. Algebra és számelmélet
III. Függvények
IV. Háromszögek, négyszögek, sokszögek
V. Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek
VI. Egybevágósági transzformációk
VII. Statisztika

Sokan vélik úgy, hogy a tanítás nem tudomány, hanem művészet. Mindannyian azt szeretnénk, hogy diákjaink ne félve és gátlásokkal tele gondoljanak a matematikaórákra, hanem értsék és okosan alkalmazzák azt, amit velük megtanítani igyekszünk. Talán ha a tananyag – egy könyv formájában – megfelelő módon a tanulók kezébe adható, akkor az órán mi magunk is sokkal nagyobb teret kaphatunk egyéni módszereink kibontakoztatására.

Ehhez kívánnak sok sikert a kilencedikes tankönyv szerzői: Kosztolányi József, Kovács István, Pintér Klára, Urbán János és Vincze István.

Mintaoldal a Matematika 9. tankönyvből


EGYBEVÁGÓSÁGI TRANSZFORMÁCIÓK

7. Pont körüli forgatás a síkban

Vegyünk fel két, egymással 60°-os szöget bezáró egyenest (jelölje őket t_1 és t_2, metszéspontjuk legyen O), valamint egy ABC háromszöget. Tükrözzük ezt a háromszöget a t_1 egyenesre, majd a képet ($A'B'C'$ háromszög) a t_2 egyenesre. (45. ábra)

pont körüli forgatás

45. ábra

A második tükrözés után kapott $A''B''C''$ háromszög és az eredeti ABC háromszög egymáshoz viszonyított helyzetét tekintve a tengelyes tükrözés tulajdonságait felhasználva észrevehetők a következők:

1. $OA = OA''$, $OB = OB''$, $OC = OC''$;
2. $AOA'' \sphericalangle = BOB'' \sphericalangle = COC'' \sphericalangle = 120° = 2 \cdot 60°$.

A fenti példa alapján a két tengelyes tükrözés egymásutánja egy újabb egybevágósági transzformációt határoz meg a síkban, *a pont körüli elforgatást.*

DEFINÍCIÓ: **Adott a sík egy O pontja és egy α irányított szög, amelynek nagyságára nézve $0° \leq |\alpha| \leq 360°$. (46. ábra)**
A sík minden egyes P pontjához rendeljünk hozzá egy P' pontot a következőképpen:
– O-hoz önmagát rendeljük, azaz $O = O'$;
– ha $P \neq O$, akkor P' a sík azon pontja, amelyre $OP = OP'$, és az OP félegyenes α irányított forgásszögű elforgatottja az OP' félegyenes.

Az O pont *a forgatás középpontja* (centruma).

46. ábra

A pont körüli forgatást egyértelműen meghatározza az O pont és az α irányított szög, vagy az O pont, egy O-tól különböző P pont és annak P' képe.

222

1. példa

Vegyünk fel egy ABC háromszöget, valamint egy O pontot. Forgassuk el a háromszöget O körül 90°-kal.

Megoldás

A háromszög csúcsainak elforgatottjai egyértelműen meghatározzák a képháromszöget. (47. ábra)

47. ábra

A pont körüli forgatás tulajdonságai

(1) Ha $\alpha \neq k \cdot 360°$ ($k \in Z$), akkor a transzformáció **egyetlen fixpontja** a forgatás O középpontja. Ha $\alpha = k \cdot 360°$ ($k \in Z$), akkor a sík minden pontja fixpont (identikus transzformáció). (48. ábra)
(2) Ha $\alpha = \pm 180°$, akkor az O körüli elforgatás az O-ra vonatkozó középpontos tükrözéssel egyezik meg. (48. ábra)
(3) A pont körüli forgatás **távolságtartó** és **szögtartó** transzformáció. (50. ábra)
(4) Az O pont körüli α irányított szögű forgatás előáll két olyan tengelyes tükrözés egymás utáni végrehajtásával, ahol a tengelyek metszéspontja O, és a tengelyek által bezárt szög $\frac{|\alpha|}{2}$. (51. ábra)

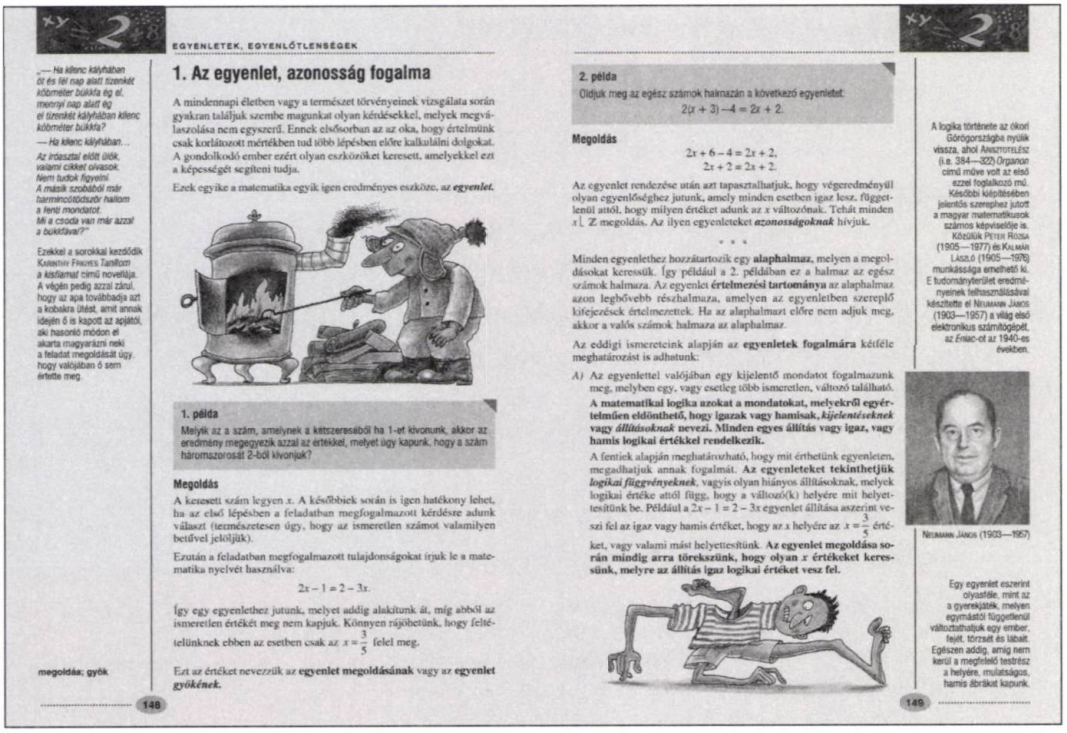
51. ábra

48. ábra

49. ábra

50. ábra

223



Mintaoldal a Matematika 9. tankönyvből

Sokszínű matematika – tankönyv, 5. osztály
MS-2305 (B5, 2002. május, színes), 780 Ft

Sokszínű matematika – munkafüzet, 5. osztály
MS-2315 (B5, 2002. május), 610 Ft

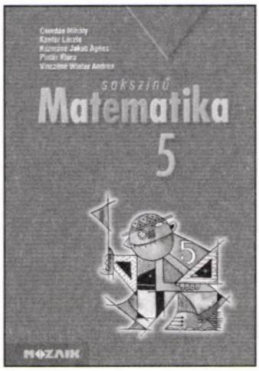
Sokszínű matematika – tankönyv, 6. osztály
MS-2306 (B5, 2002. november, színes), 980 Ft

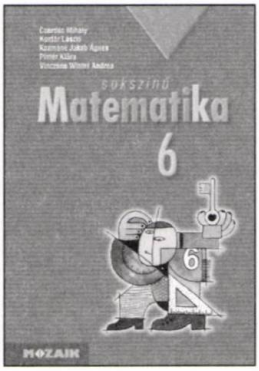
Sokszínű matematika – munkafüzet, 6. osztály
MS-2316 (B5, 2002. november), 610 Ft

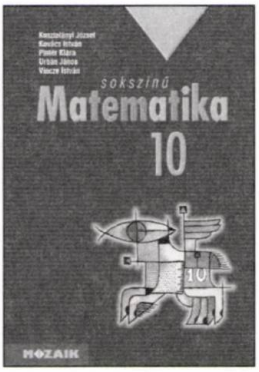
Sokszínű matematika – tantárgyi tanterv 5–8. osztály
MS-9825 (B5, 28 o.) ➔ www.tanmenet.hu

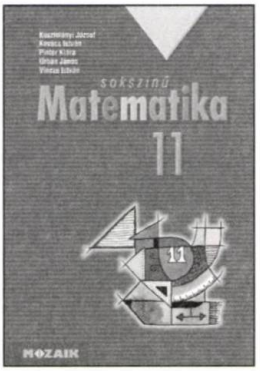
Sokszínű matematika – tankönyv, 9. osztály
MS-2309 (B5, 256 o., színes), 880 Ft, kötve 1350 Ft

Sokszínű matematika – tankönyv, 10. osztály
MS-2310 (B5, 2002. szeptember), 980 Ft, kötve 1350 Ft







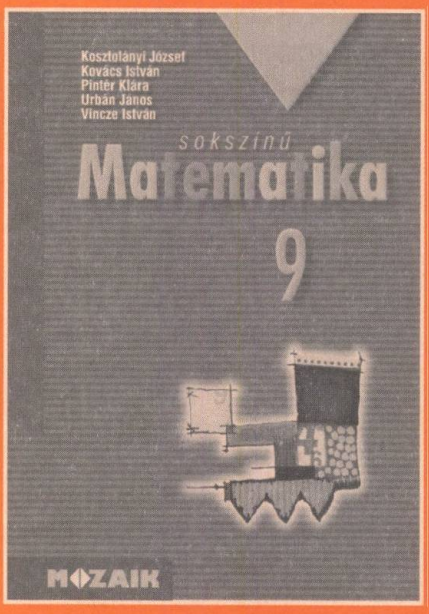


KERETTANTERV SZERINTI ÚJ MATEMATIKA TANKÖNYVEK

Az új, 1–12. évfolyamot átfogó

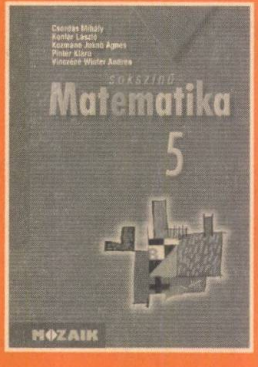
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA

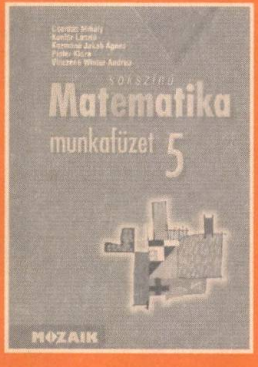
tankönyvsorozat új színfoltot jelenthet a matematikaoktatásban. A kerettanterv alapján készülő tankönyvek tartalmukban és felépítésükben is korszerűek, játékos és gyakorlatias módon dolgozzák fel a tananyagot. A kötetek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.



A kötetek szerzői: *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

KÖNYVAJÁNLAT A MATEMATIKA TANÍTÁSÁHOZ





MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu
MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

X 2

Fraktálgeometriai gondolatok a geometriai sorozatok és sorok tanításáról

(Máté László)

Egyenlőtlenségek bizonyítására szolgáló módszerek

(Csete Lajos)

Elvek, alappozíciók a „gyakorlatorientált matematikaoktatással" kapcsolatban

(Ambrus András)

X. ÉVFOLYAM 2002 2

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA
módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 1100 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Búcsú Bonifert Domonkostól

Fraktálgeometriai gondolatok a geometriai sorozatok és sorok tanításáról
Máté László docens, Budapest

Egyenlőtlenségek bizonyítására szolgáló módszerek
Csete Lajos tanár, Markotabödöge

Elvek, alappozíciók a „gyakorlatorientált matematikaoktatással" kapcsolatban
Ambrus András docens, Budapest

Feladatrovat tanároknak

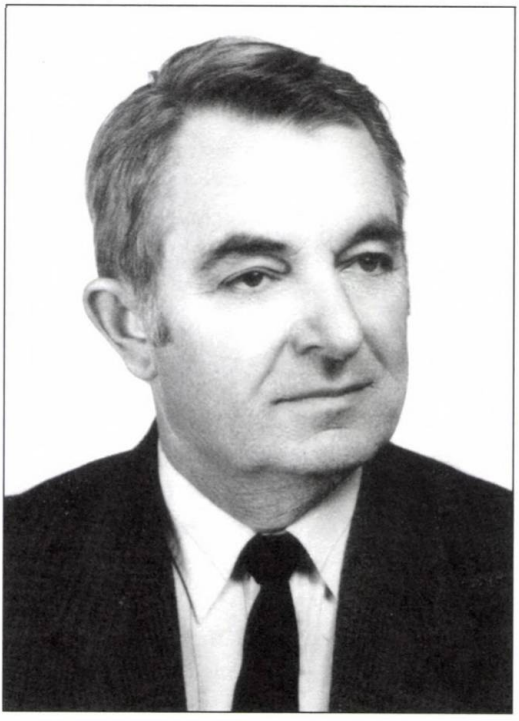
Közlési feltételek:
A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Búcsú Bonifert Domonkostól

(2002. február 18. du. 2 óra)

KÖNYVTÁR SZOLNOK



1942. szeptember 12-én egy fénylő pont jelent meg az örökkévalóságba nyúló időtengelyen és egyre nagyobb fényt árasztón világított meg egy intervallumot, Bonifert Domonkos életútját. Családja, kollégái a Juhász Gyula Tanárképző Főikolai Karon, a Bolyai Intézetben, a Gyakorló Általános Iskolában és még sok más helyen, barátai, tanítványai, ismerősei és tisztelői hosszú ideig számítottak erre a fényre, amely 2002. február 12-én hajnali fél négykor utolsót lobbant. Tanári pályája csúcsán, a magaslaton, hivatása gyakorlása közben szólította el a sors. 2002. február 11-én este, másnapi előadására készülve érte a rosszullét, amelyből már nem volt visszaút. Sokáig nem is fogtuk fel, hogy a fekete zászló, a gyászszalagos névtábla, az íróasztalán lévő fehér szegfűcsokor azt jelenti, hogy reggelente nem jelenik meg derűs egyénisége, egy – egy kedves kérdéssel vagy megjegyzéssel indítva a tanszéki munkát. Az utolsó napon is így volt. Egy tanártársunk látogatására indulva, a rakparton végighajtva és gyönyörködve a folyó látványában az emberi sors fordulatairól beszélgettünk.

Két folyóhoz is kötődött élete. A Duna mellett született. Dunabogdányban látta felkelni, és a Tisza mellett, Szegeden, lenyugodni a Napot. A Duna mellett, Dunapatajon kezdett tanítani, és a Tisza mellett, Szegeden tartotta utolsó előadását.

És egy élet volt közben.

Első, matematika – fizika – ének szakos tanári oklevelét 38 évvel ezelőtt a Szegedi Tanárképző Főiskolán szerezte. Ekkor kötött házasságot, és rakta le feleségével egy gyümölcsöző család alapjait. Gyermekeikben és három szép unokájukban élnek tovább mindketten.

Emelkedett a tanári pályán. 34 évvel ezelőtt középiskolai matematika tanári oklevelet szerzett a Kossuth Lajos Tudományegyetemen, Debrecenben, majd első Alma Matere hívó szavára családjával visszajött Szegedre, a Matematika Tanszékre. Azóta, 32 éven át, végighaladva az oktatói fokozatokon, 1999 óta mint főiskolai tanár, az analízis és a módszertan specialistájaként töretlenül szolgálta a tanárképzést.

Úttörő volt a most harmadik évnél tartó tanítóképzésben. Elismert oktatóként óraadó volt a Bolyai Intézetben is. Szerkesztőbizottsági tagsággal tisztelte meg a Polygon c. folyóirat. Debrecenhez sem maradt hűtlen, ott szerezte a dr. univ. majd a PhD tudományos fokozatokat.

Kiemelkedő alakja volt a főiskolai közéletnek, dolgozott a Főiskolai Tanács és különböző bizottságok, Tanulmányi Bizottság, Kubatura Bizottság, tagjaként, és méltán nyerte el a legmagasabb főiskolai kitüntetéseket. A Matematika Tanszék tanszékvezető-helyetteseként az ebből adódó feladatokat messzemenően teljesítve, mint a tanszék jó szelleme, mindig talált megoldást a gondok enyhítésére és a problémák áthidalására.

10 évvel ezelőtt jelent meg a „Néhány tipikus problémaszituáció matematikából" című könyve, amelyet azóta rendszeresen használunk. Szívesen dolgozott másokkal együtt. Társszerzőkkel együtt készített munkái a tanári továbbképzésben, a feladat- és fogalomtár a hatosztályos gimnáziumok számára, a Nemzeti alaptantervvel kompatibilis matematika tanterv, a Polygon c. folyóiratban a szemléletformálással és a problémamegoldással kapcsolatos cikkek, a Bolyai Társulat Rátz László Vándorgyűlésein, Szegeden és Zalaegerszegen továbbá a Kecskeméten, Kiskunhalason, Békéscsabán és Pécsett tartott emlékezetes előadásai fémjelzik azt a tevékenységet, amely most váratlanul szakadt meg.

Non omnis moriar... Nem múlik el minden nyomtalanul. Az ember szellemisége akkor is él, amikor fizikai valóságában már nincs közöttünk, de emlékét hordozzák művei, gondozzák embertársai. Mi is ezt fogjuk tenni. De amikor ezt mondom, nem csupán a család és a munkatársak, barátok, tanítványok emlékezetére gondolok, hanem azokra, a tanítás során átadott ismeretekre, amelyeket a tanítványok és azok tanítványai örökítenek át a felnövekvő generációkba. Bonifert Domonkos maga is sokat tanult és még többet adott át. Így vált az egyetemes emberi fejlődés munkásává. Így kezdte meg ezt a félévet is, megtervezve előadásait és gyakorlatait, amelyeket az Ő nevén vettek fel a hallgatói. Ezt nem változtatjuk meg, a félév végén az Ő általa kiadott tételjegyzék szerepel a vizsgákon.

Bonifert Domonkost nem tudjuk pótolni, csak helyettesíteni.

Emlékét tisztelettel és szeretettel megőrizzük.

Szalay István

Jókedvet adj

Jókedvet adj, és semmi mást Uram !
A többivel megbirkózom magam.
Akkor a többi nem is érdekel,
szerencse, balsors, kudarc, vagy siker.
Hadd mosolyogjak gondon és bajon,
nem kell más, csak ez az egy oltalom,
még magányom kiváltsága se kell,
sorsot cserélek bárhol, bárkivel,
ha jókedvemből, önként tehetem;
s fölszabadít újra a fegyelem,
ha értelmét tudom és vállalom,
s nem páncélzat, de szárny a vállamon.
S hogy a holnap se legyen csupa gond,
de kezdődő s folytatódó bolond
kaland, mi egyszer véget ér ugyan –
ahhoz is csak jó kedvet adj, Uram.

Garai Gábor

Máté László

Fraktálgeometriai gondolatok a geometriai sorozatok és sorok tanításáról

Megszoktuk, hogy egy síkbeli alakzatnak van területe és kerülete, egy vonalnak van hossza, és ezek mérése számunkra nyilvánvaló módon történik. A fraktálok „felfedezése" irányította a figyelmet, a 80-as évek elejétől kezdve, olyan alakzatokra, amelyek a szokásos módon megmérhetetlenek, hiszen a fraktálok legfontosabb jellemzője ez.

A következőkben megmutatjuk, hogy a geometriai sorozatok oktatása is jó alkalom arra, hogy olyan alakzatokat mutassunk be, amelyeknek területe és kerülete a szokásos módon nem mérhető, és így előkészítsük már a középiskolában a diákokat a fraktálokkal kapcsolatos, a matematikában egyre fontosabbnak tűnő fogalomkör befogadására. A bemutatott példák ötletet is adnak arra, hogy hogyan gyárthatunk ilyen alakzatokat.

1. rész

1. példa Az 1. ábrán egy háromszögnek kivágtuk a középső negyedét, majd a visszamaradó 3 háromszög mindegyikének is kivágtuk a középső negyedét, és ezt ismételjük újra meg újra. Hogyan alakul az így keletkezett alakzatok területe és kerülete? (Ha egy szabályt ismétlünk újra meg újra, azt iterációnak nevezzük.)

A leírt szerkesztéssel egyre több és több részt távolítunk el a kiinduló háromszögből, és így az egyes lépésekkel kapott alakzatok egymás részhalmazai. Az első lépésnél a háromszög egynegyedét távolítjuk el, majd minden további lépésnél a maradék háromszögek egynegyedét távolítjuk el újra meg újra. Az alakzatok kerületei viszont növekednek minden egyes lépésnél, mégpedig az eltávolított háromszögek kerületeivel.

Így a kerületek és a területek egy-egy geometriai sorozatot alkotnak. Ha T_n, ill. K_n az n-dik alakzat területe, ill. kerülete, akkor

$$T_{n+1} = \frac{3}{4} T_n \qquad K_{n+1} = \frac{3}{2} K_n.$$

Így a (nem negatív) $\{T_n;\ n = 1, 2,...\}$ sorozat elemei bármely pozitív számnál kisebbek, a $\{K_n;\ n = 1, 2, ...\}$ sorozat elemei pedig bármely pozitív számnál nagyobbak lesznek, ha egyre messzebb és messzebb megyünk a sorozatban. Ez utóbbi esetet röviden így fejezzük ki: $\{K_n;\ n = 1, 2,...\}$ határtalanul növekedő sorozat.

Az *1. ábrán* bemutatott eljárás „végtermékét" Sierpinski háromszögnek nevezik. Úgy érezzük, hogy a Sierpinski háromszög területe csak nulla lehet, kerülete pedig végtelen.

2. példa A *2. ábrán* az egység hosszúságú fatörzsön két 0,6 hosszúságú ág, majd mindegyik ágon két-két ág nő, amelyek mindegyikének hossza az előző két ág 0,6 része s.i.t. Az ágak összhosszúsága így alakul:

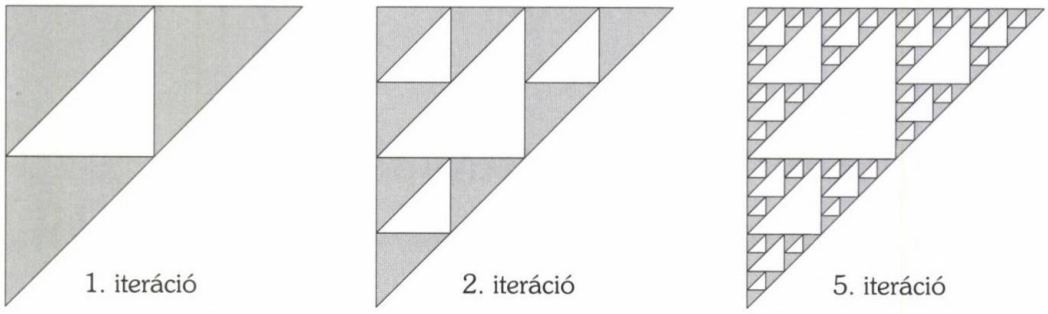
Legyen H_n az n-dik iterált (más szóval az n-dik fa, ill. az „n szintű fa") ágainak hossza. Ekkor

$$H_2 = 1 + 2 \cdot 0{,}6 \qquad H_3 = 1 + 2 \cdot 0{,}6 + 4 \cdot 0{,}6^2$$

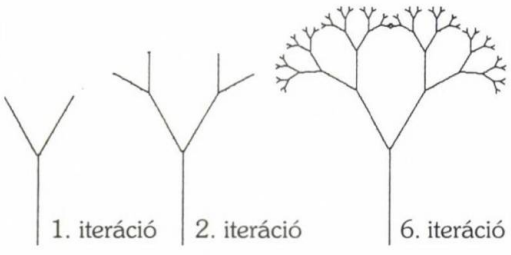
és mivel az ágak száma mindig az előző szint ágainak a duplája, az egyes ágak hossza viszont az előző szint ágainak 0,6-szorosa

$$H_n = 1 + 2 \cdot 0{,}6 + 2^2 \cdot 0{,}6^2 + \ldots + 2^{n-1} \cdot 0{,}6^{n-1} = \frac{1 \cdot 2^n - 1}{0{,}2}$$

amely szintén határtalanul növekedő sorozat.



1. ábra



2. ábra

Az eljárás „végterméke" egy olyan „fa", amely ágainak összhosszúsága bármely számnál nagyobb. Másrészt, a szerkesztett fák mindegyike elfér például egy 2 sugarú körben.

Ha az arányossági tényezőt 0,4-nek vesszük (0,6 helyett), akkor valamivel alacsonyabb fákat kapunk, és mindegyik fa ágainak összhosszúsága kisebb ötnél.

Az is könnyen belátható a megfelelő geometriai sorok vizsgálatával, hogy a fordulat 0,5-nél áll be. *Ha bármilyen picikét is 0,5 alá megyünk (vagyis bármilyen 0,5 – ϵ, $\epsilon > 0$ arányossági tényezőt veszünk), akkor mindegyik fa ágainak összhosszúsága egy véges pozitív szám alatt marad, viszont ha bármilyen picikét is növeljük a 0,5 arányossági tényezőt (vagyis bármilyen 0,5 + ϵ, $\epsilon > 0$ arányossági tényezőt veszünk), akkor a fák ágainak összhosszúsága határtalanul növekszik.*

Így megadhatunk két olyan *2. ábra* típusú sorozatot, amelyek ábrája nem, vagy alig különböztethető meg egymástól, és mégis az egyikben a fák ágainak összhosszúsága határtalanul növekszik, a másik sorozatban pedig ez egy adott érték alatt marad.

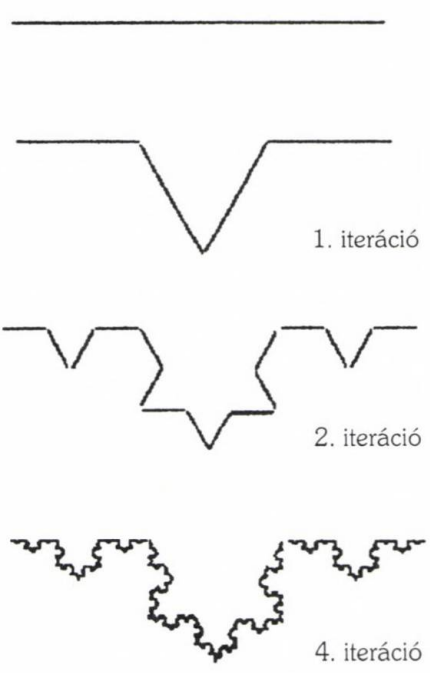
3. példa A *3. ábrán* látható sorozat *alapkonstrukciója* az 1. iterációnak nevezett törtvonal. Ha a kiinduló egyenes szakasz egységnyi, akkor ez a törtvonal négy egyharmad hosszúságú egyenes szakaszból áll. A következő, 2. iterációt úgy szerkesztjük, hogy az előző, 1. iteráció minden szakaszát lecseréljük az *alapkonstrukció (1. iteráció)* egyharmadára kicsinyített másával. A 4. iteráció úgy keletkezik, hogy az előző, 3. iteráció minden szakaszát lecseréljük az alapkonstrukció további egyharmadára, vagyis egykilencedre kicsinyített másával és így tovább.

Az ilymódón szerkesztett törtvonalak hossza is határtalanul növekszik, hiszen ha az n-ik törtvonal hossza H_n, akkor

$$H_{n+1} = \frac{4}{3} H_n.$$

Másrészt mindegyik törtvonal belefér egy 1, 5 sugarú körbe. Az *3. ábrán* bemutatott eljárás „végtermékét" Koch-görbének nevezik.

A *4. ábrán* egy olyan sorozatot mutatunk, amelyben a Koch-görbére vezető sorozatot kissé módosítottuk. Az egyenes szakaszokat olykor az alapkonstrukció, vagyis az 1. iteráció megfelelő méretű tükörképével helyettesítettük. Ilyen módosításokkal különböző zegzugos tengerpartvonalak modellizálhatók, és ezzel magyarázatot kapunk arra, hogy a szokásos eljárásokkal miért nem mérhetők meg az ilyen zegzugos partvonalak hossza.



3. ábra

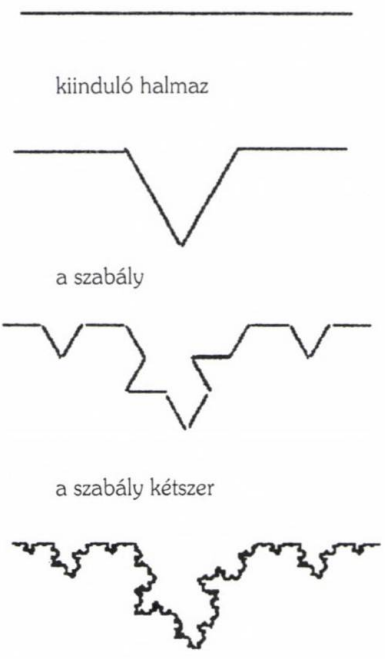
4. példa A *6. ábrán* látható iteráció sorozat „végterméke" egy faág benyomását kelti. Ez egy újabb példa arra, hogy eljárásunkkal, amit iterált függvényrendszernek neveznek, valóságos objektumok modellizálhatók. A szerkesztés menetét az *5. ábra* mutatja be részletesen az első két lépés (iteráció) leírásával.

A szabály, amelynek újabb és újabb ismétlésével alakul ki a faág, a következő:

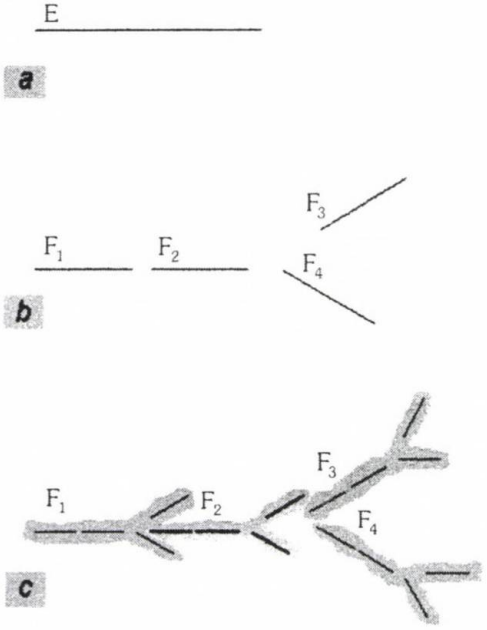
Vegyük az *E*-vel jelölt egyenes szakasz 0,4 részét (F_1), majd a 0,4 részét toljuk előre 0,4-el (F_2), végül az E felét helyezzük el az *5.b ábrán* látható módon a megfelelő eltolással és elforgatásokkal (F_3 és F_4).

Ez a szabály négy egyszerű szabály, F_1, F_2, F_3 és F_4 egyesítése, és ezt ismételve, vagyis a szabályt az *5.b ábrára* alkalmazva kapjuk az *5.c ábrát.*

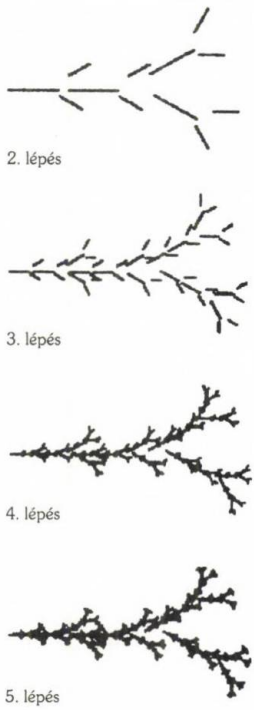
A *6. ábra* bemutatja az első öt iterációt. A kapott alakzat ezután már nem változik szemmel láthatóan. (A *7. ábra* nagyobb képfelbontásban mutatja az 5. lépés eredményét.) Éppúgy mint az előző példákban, a megfelelő



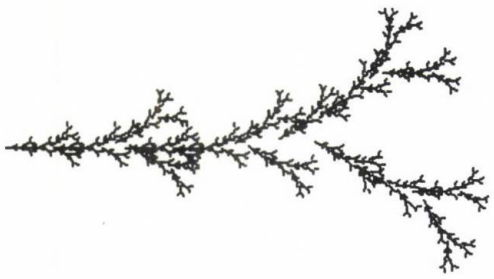
4. ábra



5. ábra



6. ábra



7. ábra

geometriai sor összegezésével kapjuk azt, hogy a modellben a faágak összhosszúsága végtelen.

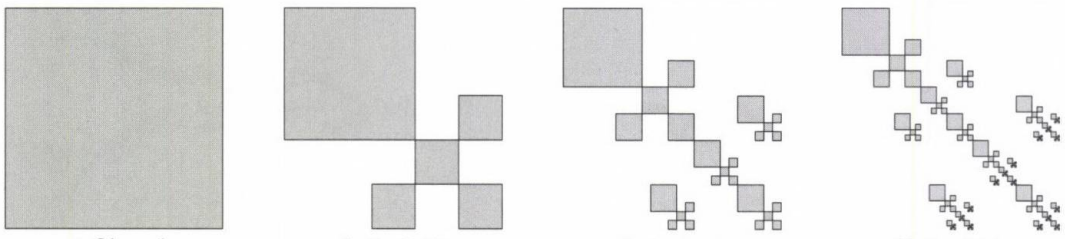
5. példa A *8. ábra* „végtermékét" csillárnak nevezzük. Az *a, b* bármilyen választásánál a csillár területe nulla, és kerülete végtelen abban az értelemben, ahogyan ezt például a Sierpinski-háromszögre megmutattuk (itt $a = 0{,}6$ és $b=0{,}2$).

2. rész

Ahogyan azt a bevezetőben említettem, a bemutatott hat példa hozzájárulhat a fraktálgeometria sajátságos világának előkészítéséhez. A példák csak a geometriai sorozatok alapvető fogalmait használják fel, mégis kitekintést adnak a középiskolai matematikából, mivel bevezetnek az önhasonló halmazok fogalmába és azok különös tulajdonságaiba.

Önhasonlónak mondjuk azt a halmazt (ábrát, alakzatot), amely a halmaz arányosan kicsinyített másaiból van összerakva. Az egyes részek arányossági tényezői különbözők lehetnek. A bemutatott hat példa egy-egy önhasonló halmaz konstrukciója.

Úgy látjuk, hogy a Sierpinski-háromszög három kisebb, fele akkora lineáris méretű Sierpinski-háromszög egyesítése. Sőt, ezen kisebb Sierpinski-háromszög mindegyike is három, most már negyed akkora lineáris méretű Sierpinski-háromszög egyesítése és így tovább. A Koch-görbe az 1. iterációnak nevezett törtvonal arányosan kicsinyített másaiból van összerakva, és úgy látjuk, hogy Koch-görbe négyharmad akkora Koch-görbe egyesítése. Hasonlót tapasztalunk a faág modellnél is, különösen akkor, ha a nagyobb képfelbontású *7. ábrát* nézzük.



8. ábra

Jobban megfigyelve (például nagyító alatt) ezeket az ábrákat azt tapasztaljuk, hogy ezek csak közelítőleg önhasonlók. A Sierpinski-háromszög, ill. Koch-görbe kicsinyített másaiban bizonyos részletek hiányoznak. Azt is tapasztaljuk, hogy az iterációk előrehaladtával a részek egyre kevésbé térnek el az egésztől.

Így feltételezzük, hogy a „végtermék" már önhasonló lesz. A végterméket viszont sohasem érjük el, hiszen minden egyes lépéssel (iterációval) valamit változtatunk az alakzaton. Így a szóbanforgó *önhasonló halmazokat nem tudjuk megszerkeszteni, csupán elképzelni tudjuk. Viszont a matematika* nyelvén pontosan le tudjuk írni. Ez azonban messze túlmegy a középiskolai matematika keretén.

Ha egy-egy rajzzal nem is, de megfelelő számítógépes animációval meg tudunk mutatni önhasonlóságot. Ha a részek nagyításával párhuzamosan az iterációt is folytatjuk, akkor a felnagyított részhalmazok pontos másai lesznek az egész halmaznak, és azt fogjuk tapasztalni, hogy a nagyítással egyre több részletét fedezzük fel a halmaznak. Bármeddig is folytatjuk az eljárást, mindig újabb és újabb részletek bukkannak fel.

A *mate@math.bme.hu/~ mate* honlapon további példák és animációs program találhatók önhasonló halmazokra.

3. rész

A bemutatott iterációs szerkesztések „végtermékének" sem a hosszúsága, sem a területe nem lehet véges pozitív szám. Ez a tény szorosan összefügg azzal, hogy a „végtermékek önhasonlók".

Feltételezzük, hogy végtermékre is érvényesek a szokásos alakzatokra (például poligónokra) vonatkozó szabályok:

- a halmaz mértéke (területe, kerülete, ill. hosszúsága) legfeljebb akkora, mint a részhalmazai mértékeinek összege;
- ha két hasonló alakzat lineáris méretaránya h, akkor területük aránya h^2,

Ezen feltételezések alapján egy rövid, de szokatlan módon vizsgálhatjuk meg a végtermékek mértékét (területét, kerületét, ill. hosszúságát). A módszer rávilágít arra, hogy mi a kapcsolat egy halmaz önhasonlósága és aközött, hogy a halmaz, a tárgyalt értelemben, megmérhetetlen.

Ha a Sierpinski-háromszög területe T, akkor

$$T \le 3\left(\frac{1}{4} \cdot T\right)$$

amiből következik, hogy T nem lehet véges pozitív szám. Ha a Koch-görbe hossza K, akkor

$$K = 4\left(\frac{1}{3} \cdot K\right)$$

mivel a Koch-görbe négyharmad akkora Koch-görbe egyesítése. Így K sem lehet véges pozitív szám.

Ha a fa ágainak összhosszúsága H, akkor

$$H = 2 \cdot 0{,}6H + 1$$

(a fa törzse egységnyi hosszú), amiből is az következik, hogy H nem lehet véges pozitív szám.

Érdemes megjegyezni, hogy 0, 4 arányossági tényezővel számolva (0, 6 helyett) a fenti egyenlőség

$$H = 2 \cdot 0{,}4H + 1$$

lesz, amiből viszont $H = 5$. Így a *2.ábrán* és az iterációt tovább folytatva kapott mindegyik fán az ágak összhosszúsága kisebb, mint öt.

4. rész

Azok az önhasonló halmazok, amelyek mértéke (hossza, területe) nem egy véges pozitív szám, a fraktálok speciális esetei. Hogy a fraktálokból mennyi tárgyalható a középiskolai matematika keretében, vagyis az 1-ben felsorolt példákon túl mit érdemes megtárgyalni, 1. példáihoz mennyi adható hozzá, azt az adott körülmények döntik el. Bármennyit is veszünk azonban a konkrét példákon túli részből, ezzel adalékot, és talán a diákok számára is érdekes adalékot, adunk abból, hogy valaminek a hossza vagy területe a megszokott módon nem mérhető meg.

Csete Lajos

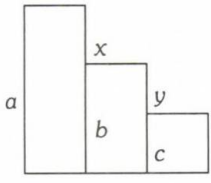
Egyenlőtlenségek bizonyítására szolgáló módszerek

A háromszög oldalainak lépcső-transzformációjáról

A következőkben vizsgált transzformáció új abban az értelemben, hogy még nem olvastam máshol. E transzformációt jobb híján lépcső-transzformációnak neveztem el. Szívesen venném, ha olvasóink rámutatnának arra szakirodalmi hivatkozással, hogy e transzformáció valójában már ismert.

A lépcső-transzformáció azon lapszik, hogy számos geometriai egyenlőtlenségben szimmetrikus a háromszög oldalainak a szerepe, ezért ilyenkor megszorítás nélkül feltehetjük, hogy a háromszög oldalaira fennáll az $a \geq b \geq c$ egyenlőtlenség.

Ezt fölfoghatjuk egy csökkenő (illetve nem növekvő) lépcsősornak is.



Ez alapján bevezetjük a következő transzformációt: $a = b + x$ és $b = c + y$, persze ekkor $a = c + x + y$.

Itt lényeges észrevennünk azt, hogy az $a \geq b \geq c$ egyenlőtlenség miatt $x \geq 0$ és $y \geq 0$ teljesül. Az $x = y = 0$ eset azt jelenti, hogy ekkor $a = b = c$.

A továbbiakban néhány példán keresztül megvizsgáljuk a lépcső-transzformáció működését.

1. Első vizsgált problémánk egy magyar felvételi-értettségi feladat volt 1991-ben. [1] szerint már 1916-ban kitűzte M. Petrović a problémát.

Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsuk be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}$$

Megoldás

a) rész

Először azt fogjuk igazolni, hogy

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2}.$$

Ehhez elég belátni, hogy

$$f(a,b,c) = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a+b+c)^2 \geq 0.$$

Mivel az egyenlőtlenség szimmetrikus a, b, c-re, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$.

Új változókat vezetünk be, legyen $x = a - b$ és $y = b - c$, ekkor x és y nemnegatívak az előző feltevésünk miatt. Innen $a = x + b$ és $b = y + c$, ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy

$$f(a,b,c) = 3(c+x+y)^2+3(c+y)^2+3c^2-(3c+2y+x)^2$$

Elvégezve a műveleteket és összevonva kapjuk, hogy: $f(a, b, c) = 2x^2 + 2xy + 2y^2 \geq 0$, hiszen x és y nemnegatívak. Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x = y = 0$, azaz $a = b = c$ esetén. Ezzel igazoltuk az eredeti egyenlőtlenség *a)* részét, hiszen átalakításaink megfordíthatók.

b) rész

Most azt fogjuk igazolni, hogy

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}.$$

Ehhez elegendő belátni, hogy $g(a,b,c) = (a+b+c)^2 - 2(a^2+b^2+c^2) > 0$. Kapjuk, hogy

$g(a,b,c) = (x+2y+3c)^2 - 2(x+y+c)^2 - 2(y+c)^2 - 2c^2 = -x^2 + 2xc + 4yc + 3c^2 = (c^2 - x^2) + 2xc + 4yc + 3c^2 = (c-x)(c+x) + 2xc + 4yc + 3c^2$

Itt $c - x = c - (a - b) = c - a + b = b + c - a > 0$ egyenlőtlenség miatt. Ebből következik, hogy $g(a,b,c) > 0$, hiszen a többi tag nemnegatív, illetve pozitív. Ezzel igazoltuk az eredeti egyenlőtlenség *b)* részét.

2. Most egy Kürschák-versenyfeladaton keresztül vizsgáljuk a módszert. *Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsuk be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:* $a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3$ (2)

Megoldás:

Mivel az egyenlőtlenség szimmetrikus *a, b, c*-re, ezért az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$.

Új változókat vezetünk be, legyen $x = a - b$ és $y = b - c$, ekkor x és y nemnegatívak az előző feltevésünk miatt. Innen $a = x + b$ és $b = y + c$, ezeket behelyettesítve (1)-be kapjuk, hogy

$$(x + y + c)y^2 + (y + c)(-x - y)^2 + x^2c + 4(x + y + c)(y + c)c - (x + y + c)^3 - (y + c)^3 - c^3 > 0$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket, majd rendezzük, és így kapjuk, hogy $c^3 - x^2c - x^3 - 2x^2y + xc^2 + 2yc^2 > 0$

Próbáljuk szorzattá alakítani a bal oldalt!

$$c^3 - x^2c - x^3 - 2x^2y + xc^2 + 2yc^2 = (c^3 - x^3) + (xc^2 - x^2c) + (2yc^2 - 2x^2y) = (c-x)(c^2 - cx + x^2) + xc(c-x) + 2y(c^2 - x^2) = (c-x)(c^2 - cx + x^2) + xc(c-x) + 2y(c-x)(c+x) = (c-x)(c^2 - cx + x^2 + xc + 2y(c+x)) = (c-x)(c^2 + x^2 + 2yc + 2xy) > 0$$

Még több tényezőre is lehetne bontani, de ez már elég nekünk. Ugyanis $c - x = c - (a - b) = c - a + b = b + c - a > 0$, az utóbbi egyenlőtlenség a háromszög egyenlőtlenségből következik. Másrészt a másik tényezőre $c^2 + x^2 + 2yc + 2xy > 0$, hiszen itt c^2 pozitív, míg a többi tag nemnegatív. Ezzel igazoltuk a (2) egyenlőtlenség fennállását, s mivel átalakulásaink megfordíthatók, ezért az eredeti (1) egyenlőtlenség is teljesül.

3. A következő diákolimpiai versenyfeladat szoros rokonságban van az előző problémával. *Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor* $a^2(-a + b + c) + b^2(a - b + c) + c^2(a + b - c) \leq 3abc$ (3)

Megoldás:

Mivel az egyenlőtlenség szimmetrikus *a, b, c*-re, ezért az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$.

Elég bizonyítanunk, hogy $f(a,b,c) = 3abc - a^2(-a + b + c) - b^2(a - b + c) - c^2(a + b - c) \geq 0$

Új változókat vezetünk be, legyen $x = a - b$ és $y = b - c$, ekkor x és y nemnegatívak az előző feltevésünk miatt. Innen $a = x + b$ és $b = y + c$, ezeket behelyettesítve (2)-be kapjuk, hogy

$$f(a,b,c) = 3(x + y + c)(y + c)c - (x + y + c)^2(-x + c) - (y + c)^2(x + c) - c^2(x + 2y + c)$$

Végezzük el a kijelölt műveleteket, és a rendezést kapjuk, hogy:

$f(a,b,c) = cxy + cy^2 + x^3 + x^2c + 2x^2y \geq 0$ világos, hogy a kifejezés nemnegatív, hiszen minden tagja nemnegatív. ezzel igazoltuk az olimpiai egyenlőtlenséget.

4. E problémát az *American Mathematical Monthly* folyóiratban 1966-ban S. Reich tűzte ki E 1930 sorszámon. (Más megoldást olvashatunk a problémát közlő [1] könyv 17. oldalán az 1. 23 probléma megoldásaként, és megint más megoldást olvashatunk a jelen cikkben.)

Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $(a + b + c)^3 \leq 5[bc(b + c) + ca(c + a) + ab(a + b)] - 3abc$, *ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a háromszög egyenlő oldalú.*

Megoldás

Elég igazolnunk, hogy

$$f(a,b,c) = 5[bc(b + c) + ca(c + a) + ab(a + b)] - 3abc - (a + b + c)^3 \geq 0$$

Mivel az egyenlőtlenség szimmetrikus *a, b, c*-re, ezért az általánosság megszorítása nélkül

feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$. Legyen $x = a - b$ és $y = b - c$, ekkor x és y nemnegatívak az előző feltevésünk miatt. Innen $a = x + b$ és $b = y + c$, ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy $f(a,b,c) = 5(y + c)c(y + 2c) + 5c(x + y + c)(2c + x + y) + 5(x + y + c)(y + c)(x + 2y + 2c) - 3(x + y + c)(y + c)c - (x + 2y + 3c)^3$

Ha itt elvégezzük a kijelölt műveleteket, akkor kapjuk, hogy $f(a,b,c) = 2y^3 - x^3 + cy^2 + cx^2 + cxy - x^2y + 3xy^2 = (cx^2 - x^3) + (cxy - x^2y) + 2y^3 + cy^2 + 3xy^2 = x^2(c - x) + xy(c - x) + 2y^3 + cy^2 + 3xy^2$

Vegyük figyelembe, hogy $c - x = c - (a - b) = c - a + b = b + c - a > 0$ a háromszög-egyenlőtlenség miatt. Ebből következik, hogy $f(a,b,c) = x^2(c - x) + xy(c - x) + 2y^3 + cy^2 + 3xy^2 \geq 0$, hiszen az előzőek szerint itt minden tag nemnegatív. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x = y$, azaz ha $a = b = c$.

Ezzel igazoltuk az eredeti egyenlőtlenséget.

A vizsgált problémákat nyilván többféle módon meg lehet oldani, itt csak ezt a transzformációt gyakoroltuk.

Feladatok

1. *Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát, és s a háromszög félkerületét. Bizonyítsuk be, hogy ekkor* $8(s - a)(s - b)(s - c) \leq abc$, ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a háromszög egyenlő oldalú. (A. Padoa, Period. Mat. (4) 5 (1925), 80-85.)

2. Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalait jelentik, akkor

$$\frac{1}{4} < \frac{ab + bc + ca}{(a + b + c)^2} \leq \frac{1}{3}.$$

Az 1990/91. tanévben orosz versenyfeladat volt 10. osztályosok számára. *Matematika v Skole, 1991/2. 41. old és 44. old.* E problémát más transzformációval kezelem a [2] cikkben.

3. *Legyenek a, b, c egy háromszög oldalainak hosszúságai, és s a háromszög félkerülete. Bizonyítsuk be, hogy ekkor*

$$a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{36}{35} \cdot \left(s^2 + \frac{abc}{s} \right)$$

(J. F. Darling – W. Moser, Problem E 1456, American Mathematical Monthly 68 (1961) 294. és 930. old.)

4. *Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor* $8 \cdot (a^3 + b^3 + c^3)^2 \geq 9 \cdot (a^2 + bc) \cdot (b^2 + ca) \cdot (c^2 + ab)$, *ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a háromszög egyenlő oldalú.* (H. S. Hall – S. R. Knight, Higher Algebra, Macmillan, London, 1940. 521. old)

Irodalom

[1] Bottema, O. – R. Ž. Djordjević – R. R. Janić – D. S. Mitrinović – P. M. Vasić, Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969. 16. oldal, 1.19. probléma, megoldás nélkül

[2] Csete Lajos, A háromszög oldalainak egy transzformációjáról, Iskolakultúra 1994/24. 62-65. old.

[3] Reiman István, Nemzetközi Matematikai Diákolimpiák 1959-1994, Typotex, Budapest, 1964/2. feladat, 66. old. és 152-154. old.

[4] Surányi János, Matematikai versenytételek III. rész, Tankönyvkiadó, Budapest, 1992. 1972/1. feladat, 7. old. és 110-112. old. Itt két másik megoldást lehet olvasni.

Köszönöm szépen Varga Ferencné könyvtárvezetőnek (Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete), hogy volt szíves kölcsönözni az [1] könyvet.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 3$-ra és a lépcső-transzformáció

Korábban már két, hagyományostól eltérő bizonyítást vizsgáltunk a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 3$ esetére. Most egy harmadik, nem hagyományos bizonyítást próbálunk adni a következő tételre:

Igazoljuk, hogy ha a, b és c tetszőleges pozitív valós számok, akkor teljesül, hogy

$$\frac{a+b+c}{3} \geq \sqrt[3]{abc}. \qquad (1)$$

Itt egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b = c$.

Bizonyítás:

Az egyenlőtlenséget köbre emelve és nullára rendezve kapjuk, hogy

$$(a + b + c)^3 - 27 \cdot abc \geq 0 \qquad (2)$$

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy

$$a \geq b \geq c. \qquad (3)$$

Vezessük be a következő transzformációt, amelyet jobb híján lépcső transzformációnak neveztem el.

$$a = b + x \text{ és } b = c + y \qquad (4)$$

A (3) feltétel miatt $x \geq 0$ és $y \geq 0$ valós számok.

A (4) helyettesítést elvégezve a (2) egyenlőtlenségen kapjuk, hogy:

$$(3c + 2y + x)^3 -$$
$$- 27 \cdot (c + x + y) \cdot (c + y) \cdot c \geq 0 \qquad (5)$$

Itt elvégezve a műveletet kapjuk, hogy

$$9cy^2 + 9cxy + 9cx^2 + 8y^3 +$$
$$+12xy^2 + 6x^2y + x^3 \geq 0 \qquad (6)$$

Láthatjuk, hogy itt minden tag nemnegatív, és minden tagban szerepel x vagy y, ezért az összeg akkor és csak akkor lesz nulla, ha $x = y = 0$, azaz pontosan akkor lesz nulla az összeg, ha $a = b = c$. Egyébként pedig pozitív lesz (6) bal oldala, s mivel megfordítható átalakításokat végeztünk, ezért az eredeti (1) egyenlőtlenség is teljesül, ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a = b = c$.

Irodalom

[1] Csete Lajos: Egy alternatív bizonyítás a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 3$ esetére, A Matematika Tanítása, 2000/4. 3-4. old

[2] Csete Lajos: Még egy bizonyítás a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség $n = 3$ esetére, A Matematika Tanítása, 2001/4. 3.old.

Néhány homogén egyenlőtlenség igazolása normálással

1. Első vizsgált problémánk egy magyar felvételi-érettségi feladat volt 1991-ben. [1] szerint már 1916-ban kitűzte M. Petrović a problémát.

Jelölje a, b és c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Megoldás normálással:

a) rész

Először igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{3} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2},$$

ebből $(a + b + c)^2 \leq 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$.

Legyen $f(a,b,c) = 3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) - (a + b + c)^2$, és legyen t pozitív valós szám. Tekintsük az $f(ta, tb, tc)$ polinomot!

$$f(ta, tb, tc) = 3 \cdot ((ta)^2 + (tb)^2 + (tc)^2) -$$
$$- (ta + tb + tc)^2 = t^2 \cdot (3 \cdot (a^2 + b^2 + c^2) -$$
$$- (a+b+c)^2) = t^2 \cdot f(a,b,c)$$

Ezzel igazoltuk, hogy f másodfokú homogén polinom, tehát a homogenitása miatt alkalmazhatjuk a normálást.

Válasszuk a t pozitív valós számot olyanra, hogy $ta = 1$ legyen, ekkor például $tb = 1 + x$, $c = 1 + y$. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \leq b \leq c$, vagyis $ta \leq tb \leq tc$, ebből pedig $0 \leq x \leq y$ következik.

Így $f(ta, tb, tc) = f(x,y) = 3 \cdot (1^2 + (1 + x)^2 + (1 + y)^2) - (1 + (1 + x) + (1 + y))^2 = 3 \cdot (3 + 2x + 2y + x^2 + y^2) - (3 + x + y)^2 = 2x^2 - 2xy + 2y^2 = (x - y)^2 + x^2 + y^2 \geq 0$ Láthatjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 0$ és $y = 0$ és $x = y$. Ebből pedig az következik, hogy egyenlőség pontosan $ta = tb = tc$, vagyis $a = b = c$ esetén van.

Igazoltuk, hogy $f(ta, tb, tc) \geq 0$, ebből pedig az előzőek szerint következik, hogy $f(a, b, c) \geq 0$ is fennáll, mégpedig itt akkor és csak akkor van

egyenlőség, ha $a = b = c$. Ezzel igazoltuk az (1) egyenlőtlenség első felét.

b) rész

Azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}.$$

Legyen $g(a,b,c) = (a + b + c)^2 - 2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)$, ezenkívül legyen t pozitív valós szám. Tekintsük a $g(ta,tb,tc)$ polinomot!

$g(ta, tb, tc) = (ta + tb + tc)^2 - 2 \cdot ((ta)^2 + (tb)^2 + (tc)^2) = t^2 \cdot ((a + b + c)^2 - 2 \cdot (a^2 + b^2 + c^2)) = t^2 \cdot g(a, b, c)$

Vagyis g (másodfokú) homogén polinom, ezért alkalmazhatjuk a normálást.

Legyen a t olyan pozitív valós szám, amelyre $ta = 1$, ekkor például $tb = 1 + x$, $tc = 1 + y$. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \le b \le c$, vagyis $ta \le tb \le tc$, ebből pedig $0 \le x \le y$ következik.

$$g(ta,tb,tc) = (1 + (1 + x) + (1 + y))^2 - 2 \cdot (1^2 + (1 + x)^2 + (1+y)^2) = 3 + 2x + 2y - x^2 + 2xy - y^2$$

Hát ez kissé csúnyának tűnik. Érdemes meggondolnunk ekkor, hogy $ta = 1$, $tb = 1 + x$, $tc = 1 + y$ egy háromszág oldalai, vagyis fennáll az oldalakra a háromszög egyenlőtlenség.

Tehát $1 + (1 + x) > 1 + y$, ebből $1 + x > y$ és még $1 + (1 + y) > 1 + x$, vagyis $1 + y > x$. (Persze az utóbbinál az erősebb $y \ge x$ is fennáll.)

Ezeket figyelembe véve rendezzük azt a polinomot, ahol megakadtunk.

$g(ta, tb, tc) = 3 + 2x + 2y - x^2 + 2xy - y^2 = (y + xy - y^2) + (x + xy - x^2) + 3 + x + y = y \cdot (1 + x - y) + x \cdot (1 + y - x) + 3 + x + y.$

Vegyük észre, hogy a zárójeles kifejezések a háromszög-egyenlőtlenségek miatt pozitívak, míg x és y nemnegatív, a 3 pozitív, ezért fennáll, hogy

$g(ta, tb, tc) = y \cdot (1 + x - y) + x \cdot (1 + y - x) + 3 + x + y > 0$. Láthatjuk, hogy ez mindig határozottan pozitiv az előzőek miatt.

Ebből következik, hogy $g(ta, tb, tc) = t^2 \cdot g(a, b, c)$ miatt $g(a, b, c) > 0$ is teljesül, ezzel pedig igazoltuk (1) második részét.

2. A következőkben megpróbálunk megbirkózni egy 1972-es Kürschák-versenyfeladattal. [5]

Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsuk be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3 \quad (2)$$

Megoldás normálással:

Legyen $f(a, b, c) = a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 4abc - a^3 - b^3 - c^3$ és legyen t pozitív valós szám. Tekintsük az $f(ta, tb, tc)$ polinomot!

$$f(ta, tb, tc) = ta(tb - tc)^2 + tb(tc - ta)^2 + tc(ta - tb)^2 + 4tatbtc - (ta)^3 - (tb)^3 - (tc)^3 = t^3 - (a(b - c)^2 + b(c - a)^2 + c(a - b)^2 + 4abc - a^3 - b^3 - c^3) = t^3 \cdot f(a,b,c)$$

Ebből következik, hogy f (harmadfokú) homogén polinom. Ezért alkalmazhatjuk a normálási módszert.

Válasszuk a t pozitív valós számot olyanra, hogy $ta = 1$ legyen, ekkor például $tb = 1 + x$, $c = 1 + y$. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \le b \le c$, vagyis $ta \le tb \le tc$, ebből pedig $0 \le x \le y$ következik. Így $f(ta, tb, tc) = f(x, y) = 1 \cdot (1+x - (1+y))^2 + (1 + x) \cdot (1 + y - 1)^2 + (1 + y)(1 - (1 + y))^2 + 4 \cdot 1 \cdot (1 + x) \cdot (1 + y) - 1^3 - (1 + x)^3 - (1 + y)^3 = - x^3 - 2x^2 + xy^2 + 2xy + x + y + 1$

Azt kellene belátni, hogy az utóbbi kifejezés pozitív.

$$- x^3 - 2x^2 + xy^2 + 2xy + x + y + 1 = (y^2x - x^3) + (2xy - 2x^2) + x + y+1 = x \cdot (y^2 - x^2) + 2x \cdot (y - x) + x + y + 1$$

Láthatjuk, hogy a zárójeles kifejezések nemnegatívak $0 \le x \le y$ miatt, másrészt x és y nemnegatív, az 1 pedig pozitív. Ezért valóban fennáll, hogy

$$f(ta, tb, tc) = x \cdot (y^2 - x^2) + 2x \cdot (y - x) + x + y + 1 > 0$$

$f(ta, tb, tc) = t^3 \cdot f(a, b, c)$ és $t > 0$ miatt eb-

ből következik, hogy $f(a, b, c) > 0$ is fennáll. Ezzel igazoltuk a (2) Kürschák-versenyfeladat állítását.

3. Az előző Kürschák-versenyfeladattal némi rokonságban van a következő probléma, amelyet a Nemzetközi Matematikai Diákolimpián tűztek ki 1964-ben. [4]

Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$a^2(-a+b+c) + b^2(a-b+c) + c^2(a+b-c) \le 3abc \qquad (3)$$

Megoldás normálással:

Legyen $f(a, b, c) = 3abc - a^2(-a+b+c) - b^2(a-b+c) - c^2(a+b-c)$ és t pedig legyen pozitív valós szám. Tekintsük az $f(ta, tb, tc)$ polinomot!

$f(ta, tb, tc) = 3tatbtc - (ta)^2(-ta+tb+tc) - (tb)^2(ta-tb+tc) - (tc)^2(ta+tb-tc) = t^3 \cdot (3abc - a^2(-a+b+c) - b^2(a-b+c) - c^2(a+b-c)) = t^3 \cdot f(a, b, c)$. Ebből következik, hogy f (harmadfokú) homogén polinom. Így normálhatjuk az egyenlőtlenséget.

Válasszuk a t pozitív valós számot olyanra, hogy $ta = 1$ legyen, ekkor például $tb = 1 + x$, $c = 1 + y$. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \le b \le c$, vagyis

$ta \le tb \le tc$, ebből pedig $0 \le x \le y$ következik. $f(ta, tb, tc) = f(x, y) = 3 \cdot 1 \cdot (1+x) \cdot (1+y) - 1^2(-1+(1+x)+(1+y)) - (1+x)^2(1-(1+x)+(1+y)) - (1+y)^2(1+(1+x)-(1+y)) = -xy + x^2 - x^2y + x^3 + y^2 - xy^2 + y^3 = (y^3 - y^2x) + (y^2 - xy) + (x^3 + x^2 - x^2y) = y^2(y-x) + y(y-x) + x^2(x+1-y)$. Itt az első két zárójeles kifejezés $0 \le x \le y$ miatt nemnegatív, míg a harmadik zárójeles kifejezés pedig a háromszög-egyenlőtlenség szerint pozitív, hiszen $1 + (1 + x) > 1 + y$, ebből pedig $1 + x > y$.

Azt kaptuk, hogy $f(ta, tb, tc) \ge 0$, és itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x = 0$ és $y = 0$ és $x = y$. Ebből pedig az következik, hogy egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $ta = tb = tc$, vagyis $a = b = c$.

$f(ta, tb, tc) = t^3 \cdot f(a, b, c)$ és $t > 0$ miatt ebből következik, hogy $f(a, b, c) \ge 0$ teljesül. Ez pedig azt jelenti, hogy igazoltuk a (3) olimpiai versenyfeladat egyenlőtlenségét, amelyben az előzőek szerint akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $a = b = c$.

4. Nekivágunk az American Mathematical Monthly folyóiratban 1966-ban S. Reich által kitűzött E 1930 számú probléma normálással való megoldásának. (Más megoldást olvashatunk a problémát közlő [1] könyv 17. oldalán az 1. 23 probléma megoldásaként.)

Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$(a+b+c)^3 \le 5[bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)] - 3abc \qquad (4)$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a háromszög egyenlő oldalú.

Megoldás:

Legyen $f(a, b, c) = 5[bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)] - 3abc - (a+b+c)^3$ és legyen t pozitív valós szám. Vizsgáljuk az $f(ta, tb, tc)$ polinomot!

$f(ta, tb, tc) = 5[tbtc(tb+tc) + tcta(tc+ta) + tatb(ta+tb)] - 3tatbtc - (ta+tb+tc)^3 = t^3 \cdot (5[bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)] - 3abc - (a+b+c)^3) = t^3 \cdot f(a, b, c)$

Azt kaptuk, hogy az f (harmadfokú) homogén polinom, vagyis megpróbálhatjuk alkalmazni a normálási eljárást. A már kissé megunt módszer szerint: válasszuk a t pozitiv valós számot olyanra, hogy $ta = 1$ legyen, ekkor például $tb = 1 + x$, $c = 1 + y$. A szimmetria miatt feltehetjük, hogy $a \le b \le c$, vagyis $ta \le tb \le tc$, ebből pedig $0 \le x \le y$ következik.

$$f(ta, tb, tc) = 5[(1+x)(1+y)(1+x) + (1+y)) + (1+y) \cdot 1 \cdot ((1+y)+1) + 1 \cdot (1+x)(1+(1+x))] - 3 \cdot 1 \cdot (1+x)(1+y) - (1+(1+x)+(1+y))^3 = -xy + y^2 + x^2 + 2x^2y + 2xy^2 - x^3 - y^3 (x^2 - xy + y^2) + 2xy(x+y) - (x^3 + y^3) = (x^2 - xy + y^2) + 2xy(x+y) - (x+y)$$

$$(x^2 - xy + y^2) = (x^2 - xy + y^2)(1 - (x + y)) + \\ + 2xy(x + y)$$

Vizsgáljuk csak meg ezt a kifejezést!

$x^2 - xy + y^2 = x^2 + (y^2 - xy) = x^2 + y$ $(y - x)$ ez pedig nemnegatív, mivel $0 \le x \le y$, $2xy(x + y)$ szintén nemnegatív ugyanezért.

Ha $(1 - (x + y)) \ge 0$, vagyis $1 \ge x + y$, akkor készen vagyunk, mert a vizsgált kifejezés nemnegatív. Ez lesz az 1. eset, míg a 2. eset, ha az x-re és y-ra $x + y > 1$ áll fenn. Ekkor vajon mit mondhatunk a vizsgált kifejezésről?

Onnan indulunk újra, hogy $-xy + y^2 + x^2 + 2x^2y + 2xy^2 - x^3 - y^3 = (x^2 + x^2y - x^3) + (y^2 + xy^2 - y^3) + x^2y + xy^2 - xy = x^2(1 + y - x) + y^2(1 + x - y) + xy(x + y - 1)$

Ez a kifejezés valóban nemnegatív; mert x, y nemnegatív, másrészt a háromszög egyenlőtlenség miatt az első két zárójeles tényező pozitív, hiszen $1 + (1 + y) > 1 + x$ és ebből $1 + y - x > 0$, ugyanígy $1 + (1 + x) > 1 + y$ és ebből $1 + x - y > 0$. Harmadrészt az utolsó zárójeles tényező azért pozitív, mert a 2. eset pontosan ezt jelenti.

Vagyis azt kaptuk, hogy $f(ta, tb, tc) = x^2(1 + y - x) + y^2(1 + x - y) + xy(x + y - 1) \ge 0$, ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x = y = 0$, azaz $ta = tb = tc$ esetén, tehát $a = b = c$ esetén. Mivel $f(ta, tb, tc) = t^3 \cdot f(a, b, c)$ és t pozitív, ezért fennáll, hogy $f(a, b, c) \ge 0$, ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a = b = c$. Ezzel igazoltuk a (4) egyenlőtlenséget.

Természetesen a vizsgált feladatokat sokféle módon meg lehet oldani. De ha nem jut eszünkbe egyszerű megoldás, vagy több megoldást alkarunk adni, akkor megpróbálhatjuk a homogén egyenlőtlenségeket normálással is megoldani.

Feladatok

1. *Jelentse a, b, c egy háromszög oldadainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor*

$$(a + b - c)(b + c - a)(c + a - b) \le abc,$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a háromszög egyenlő oldalú.

E feladat sokszor és sok helyen szerepelt, az [1] könyv 12.oldala 1925-re hivatkozik, amikor bizonyos A. Padoa tűzte ki: *Period. Math.* (4) 5 (1925) 80-85.

2. *Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalait jelentik, akkor*

$$\frac{1}{4} < \frac{ab + bc + ca}{(a + b + c)^2} \le \frac{1}{3}.$$

Az 1990/91. tanévben orosz versenyfeladat volt 10. osztályosok számára. Matematika v Skole, 1991/2. 41. old. és 44. o1d.

E problémát más transzformációval kezelem a [2] cikkben.

3. *Igazoljuk, hogy ha a, b, c egy háromszög oldalait jelentik, akkor*

$$\frac{a}{b + c} + \frac{b}{a + c} + \frac{c}{a + b} \ge \frac{3}{2}$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor szerepel, amikor $a = b = c$.

E probléma sokszor előfordul a szakirodalomban, az [1] könyvben a 15. oldalon azt írják, hogy 1903-ban tűzte ki A. M. Nesbitt az Educational Times folyóiratban. (Problem 15114, Educ. Times (2) 3 (1903), 37-38. A könyvben egy megoldása is szeregel a feladatnak.

Az Engel-könyv [3] négy megoldást ad rá a 163-164. oldalakon, amelyek közül a negyedik megoldás normálással történik.

4. *Legyen a, b, c egy háromszög oldalainak hossza. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a^3 + b^3 + c^3 + 3abc \ge ab(a + b) + bc(b + c) + ca(c + a)$*

1975 ben szovjet olimpiai feladat, [3] 166. old.

Irodalom

[1] Bottema, O. – R. Ž. Djordjević – R. R. Janić – D. S. Mitrinović – P. M. Vasić, Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969. l6.oldal, 1.19. probléma, megoldás nélkül

[2] Csete Lajos, A háromszög oldalainak egy transzformációjáról, Iskolakultúra 1994/24. 62-65.o1d.

[3] Engel, Arthur: Problem-Solving Strategies, Springer-Verlag, New York-Heidelberg-Berlin, 1998.

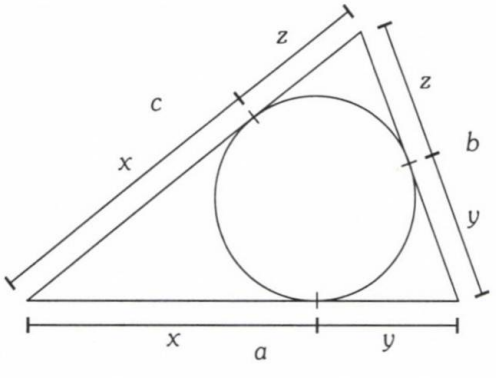
[4] Reiman István, Nemzetközi Matematikai Diákodimpiák 1959-1994, Typotex, Budapest, 1997. 1964/2. feladat, 66. old. és 152-154.old.

[5] Surányi János, Matematikai versenytételek III. rész, Tankányvkiadó, Budapest, 1992. 1972/1. feladat, 7. old. és 110-112.old. Itt két másik megoldást lehet olvasni.

Köszönöm szépen Varga Ferencné könyvtárvezetőnek (Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete), hogy volt szíves kölcsönözni az [1] és [3] könyvet.

Az érintőszakasz-transzformáció néhány alkalmazása

Legyenek egy háromszög oldalai a, b és c. Ekkor tekintsük a háromszögbe írt kör oldalakkal való érintési pontjait. Ezek olyan szakaszokra osztják a háromszög oldalait, hogy $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$. (Hiszen mint tudjuk, bármely körhöz tetszőleges külső pontból húzott érintőszakaszok hossza egyenlő.) A háromszög oldalainak ezen transzformációját érintőszakasz-transzformációnak fogjuk nevezni.



1. Első vizsgált problémánk egy magyar felvételi-érettségi feladat volt 1991-ben. [1] szerint már 1916-ban kitűzte M. Petrović a problémát.

Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsuk be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$\frac{1}{3} \le \frac{a^2+b^2+c^2}{(a+b+c)^2} < \frac{1}{2}.$$

Megoldás: Az ismert $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$ transzformációt végrehajtva:

$$\frac{1}{4} < \frac{(x+y)\cdot(y+z)+(y+z)\cdot(z+x)+(z+x)\cdot(x+y)}{(2\cdot(x+y+z))^2} \le \frac{1}{3}$$

Először a bal oldalt igazoljuk.

$$\frac{1}{4}\cdot 4\cdot(x^2+y^2+z^2+2\cdot x\cdot y+2\cdot y\cdot z+2\cdot z\cdot x) <$$
$$< (x+y)\cdot(y+z)+(y+z)\cdot(z+x)+(z+x)\cdot(x+y).$$

Elvégezve a műveleteket, rendezve a következő eredményt kapjuk: $0 < x \cdot y + y \cdot z + z \cdot x$. Ez pedig nyilvánvalóan teljesül, hiszen x, y és z pozitív.

Az egyenlőtlenség bal oldalát tehát igazoltuk. Az is látható, hogy az $\frac{1}{4}$ értéket soha nem érheti el az eredeti tört.

Nézzük most a jobb oldali egyenlőtlenséget!

$$(x+y)\cdot(y+z)+(y+z)\cdot(z+x)+$$
$$+(z+x)\cdot(x+y) \le \frac{1}{3}\cdot 4\cdot(x+y+z)^2$$

Elvégezve a műveleteket és rendezve, az alábbi eredményt kapjuk:

$$0 \le x^2+y^2+z^2-x\cdot y-y\cdot z-z\cdot x.$$

Ami ismert egyenlőtlenség, s például 2-vel megszorozva a következő alakra hozzuk:

$$0 \le 2\cdot x^2+2\cdot y^2+$$
$$+2\cdot z^2-2\cdot x\cdot y-2\cdot y\cdot z-2\cdot z\cdot x$$

ez pedig nem más, mint

$$0 \le (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2$$

Ez nyilván teljesül, ebből következik, hogy az eredeti egyenlőtlenség jobb oldala is teljesül. Egyenlőség pontosan akkor, ha $x = y = z$, tehát $a = b = c$ esetén.

2. Most egy Kürschák-versenyfeladaton keresztül vizsgáljuk a módszert.

Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak a hosszát. Bizonyítsuk be, hogy fennáll a következő egyenlőtlenség:

$$a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc > a^3 + b^3 + c^3$$

Megoldás:

Azt kell igazolnunk, hogy $f(a,b,c) = a(b-c)^2 + b(c-a)^2 + c(a-b)^2 + 4abc - a^3 - b^3 - c^3 > 0$

Alkalmazzuk az érintőszakasz-transzformációt! Legyen $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$. Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy: $f(a,b,c) = (x+y)(y-x)^2 + (y+z)(z-y)^2 + (z+x)(x-z)^2 + 4 \cdot (x+y)(y+z)(z+x) - (x+y)^3 - (y+z)^3 - (z+x)^3$

Végezzük el a kijelölt műveleteket és összevonásokat, így kapjuk, hogy $f(a, b, c) = 8xyz > 0$, hiszen az x, y, illetve z pozitív számok.

Ezzel megoldottuk a Kürschák-versenyfeladatot.

3. A következő diákolimpiai versenyfeladat szoros rokonságban van az előző problémával.

Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a^2(-a+b+c) + b^2(a-b+c) + c^2(a+b-c) \le 3abc$

Megoldás:

Elég igazolnunk, hogy $f(a, b, c) = 3abc - a^2(-a+b+c) - b^2(a-b+c) - c^2(a+b-c) \ge 0$

Az érintőszakasz-transzformációt használva legyen $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$. Ezeket behelyettesítve kapjuk, hogy:

$$f(a,b,c) = 3(x+y)(y+z)(z+x) - 2(x+y)^2 z - 2(y+z)^2 x - 2(z+x)^2 y$$

Elvégezve a kijelölt műveleteket és az összevonásokat, kapjuk, hogy elég bizonyítani a következőt:

$$f(a, b, c) = x^2y + xz^2 + x^2z + y^2z + y^2x + yz^2 - 6xyz \ge 0$$

Az utóbbi egyenlőtlenséget nyilván többféleképpen bizonyíthatjuk. Egy egyszerű bizonyítást kapunk, ha a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget alkalmazzuk hat darab pozitív számra:

$$\frac{x^2y + xz^2 + x^2z + y^2z + y^2x + yz^2}{6} \ge \sqrt[6]{(x^2y)(xz^2)(x^2z)(y^2z)(y^2x)(yz^2)} = \sqrt[6]{x^6y^6z^6} = xyz$$

Az egyenlőtlenséget 6-tal szorozva megkapjuk a keresett $f(a, b, c) = x^2y + xz^2 + x^2z + y^2z + y^2x + yz^2 - 6xyz \ge 0$ egyenlőtlenség igazolását. Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a számok egyenlők, amelyekre alkalmaztuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget. Gondoljuk meg, hogy ebből egyszerre következik, hogy pontosan $x = y = z$ esetén áll fenn egyenlőség az egyenlőtlenségben. Ebből pedig következik, hogy pontosan $a = b = c$ esetén van egyenlőség az eredeti egyenlőtlenségben. Ezzel igazoltuk az olimpiai versenyfeladat állítását.

4. E problémát az *American Mathematical Monthly* folyóiratban 1966-ban S. Reich tűzte ki E 1930 sorszámon. (Más megoldást olvashatunk a problémát közlő [1] könyv 17. oldalán az 1. 23 probléma megoldásaként, és megint más megoldást olvashatunk a [3] cikkben.)

Jelentse a, b, c egy háromszög oldalainak hosszát. Bizonyítsuk be, hogy ekkor

$$(a+b+c)^3 \le 5[bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)] - 3abc$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a háromszög egyenlő oldalú.

Megoldás:

Elegendő igazolnunk, hogy

$$f(a, b, c) = 5[bc(b+c) + ca(c+a) + ab(a+b)] - 3abc - (a+b+c)^3 \ge 0\,.$$

Az érintőszakasz-transzformációt bevetve legyen $a = x + y$, $b = y + z$, $c = z + x$. Ezeket behelyettesítve és a kijelölt műveleteket elvégezve, összevonás után kapjuk, hogy elég bizonyítani a következő egyenlőtlenséget:

$$f(a,b,c) = 2x^3 + 2y^3 + 2z^3 - 2xy^2 - 2x^2y - 2y^2z - 2yz^2 - 2xz^2 - 2x^2z + 6xyz \ge 0$$

Kissé ijesztő a kapott egyenlőtlenség.

$$x^3 + y^3 + z^3 - xy^2 - x^2y - y^2z - yz^2 - xz^2 - x^2z + 3xyz \geq 0$$

Átalakítva kapjuk, hogy

$$x^3 + y^3 + z^3 + 3xyz \geq xy\,(x+y) + yz(y+z) + zx(z+x)$$

Ez szimmetrikusabb alakú egyenlőtlenség, amelyről nagy nehezen eszembe jutott, hogy ezt már láttam x, y, z helyett a, b, c-vel felírva. Mégpedig egy szovjet versenyfeladat volt 1975-ben. Miután idáig jutottam, az is felderengett, hogy kitűztem megoldani a normálásról szóló cikk végén. Tényleg, normálással nem is olyan nehéz megoldani.

De mi most másképp csináljuk. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $x \geq y \geq z$. Megpróbáljuk részekre osztani a szimmetrikus egyenlőtlenséget, és a darabokkal külön-külön bánunk el.

Először kimutatjuk, hogy $z^3 + xyz \geq xz^2 + yz^2$, ugyanis ez nem más, mint $z^3 + xyz - xz^2 - yz^2 \geq 0$, azaz $z(z^2 + xy - xz - yz) \geq 0$, tehát $z(x-z)(y-z) \geq 0$, ez pedig fennáll, hiszen $x \geq y \geq z > 0$.

Így elegendő kimutatnunk, hogy

$$x^3 + y^3 + 2xyz \geq xy(x+y) + x^2z + y^2z$$

azaz

$$x^3 + y^3 + 2xyz \geq xy(x+y) + z(x^2 + y^2),$$

$$(x+y)^3 - 3xy(x+y) + 2xyz \geq xy(x+y) + z(x+y)^2 - 2xyz$$

$$(x+y)^3 - 4xy(x+y) \geq z(x+y)^2 - 4xyz$$

$$(x+y)((x+y)^2 - 4xy) \geq z((x+y)^2 - 4xy)$$

$$(x+y)(x^2 - 2xy + y^2) \geq z(x^2 - 2xy + y^2)$$

$$(x^2 - 2xy + y^2)(x+y-z) \geq 0$$

$$(x-y)^2(x+y-z) \geq 0$$

Ezen utóbbi egyenlőtlenség viszont fennáll, mert az első tényező nyilván nemnegatív, míg a második tényező $x + y \geq z$ miatt nemnegatív. S mivel átalakításaink megfordíthatók, ezért az eredeti egyenlőtlenség is teljesül. Egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x = y = z$, ebből pedig pontosan $a = b = c$ esetén áll fenn egyenlőség az eredeti egyenlőtlenségben.

A vizsgált problémákat többféle módon is meg lehet oldani.

Feladatok

1. *Legyenek a, b és c egy háromszög oldalainak hosszúságai. Igazoljuk, hogy* $(a + b - c) \cdot (b + c - a) \cdot (c + a - b) \leq a \cdot b \cdot c$ (Sok helyen, sokszor előfordul, a [2] könyv a 12. oldalán egy 1925-beli cikkre hivatkozik: A. Padoa, Period. Mat. (4) 5 (1925), 80-85. oldal)

2. *Legyen s a háromszög félkerületének a hossza a, b és c a háromszög oldalainak hosszúságai. Igazoljuk, hogy*

$$\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} \geq \frac{9}{s}.$$

(Dr. Hajnal Imre – dr. Nemetz Tibor – dr. Pintér Lajos, Matematika III-IV. osztály, Tanári kézikönyv, Tankönyvkiadó, Budapest, 1985. 219. old. és [3])

3. *Egy háromszög oldalai a, b , c hosszúságúak Bizonyítsuk be, hogy*

$$|(a-b)\cdot(b-c)| + |(b-c)\cdot(c-a)| + |(c-a)\cdot(a-b)| < s^2$$

ahol s a háromszög félkerületének hossza. (Dr. Pintér Lajos, Egy lépéssel tovább, POLYGON, I/1. (1991. június) 69-71. old. és (3])

4. *Legyenek a, b, c egy háromszög oldalainak hosszúságai. Igazoljuk, hogy*

$$2 \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{a}\right) \geq \frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b} + 3$$

(Kvant, 1988/10. M1107, illetve [1])

Irodalom

[1] Alekszejev, Roman – Lev Kurljandcsik, Sztoroni treugolnyika, Kvant, 1993/9-10. G9-70. old.

[2] Bottema, O. – R. Ž. Djordjević – R. R. Janić – D. S. Mitrinović – P. M. Vasić, Geometrfc Inequalities, Wolters-Noordhoff-Publishing, Groningen, 1969. l6. oldal, 1.19. probléma, megoldás nélkűl

[3] Csete Lajos, A háromszög oldalainak egy transzformációjáról, Iskolakultúra 1994/24. 62-65.old.

Ambrus András

Elvek, alappozíciók a „gyakorlatorientált matematikaoktatással" kapcsolatban

Az elnevezésről

A „gyakorlatorientált" jelzőt Vancsó Ödönnel együtt vezettük be az egyoldalúan csak elméleti, absztrakt jellegű matematikaoktatással szemben. Egy KOMA pályázat segítségével bejártuk az országot a fenti témával. Az utóbbi időben úgy érzem, hogy nem a legszerencsésebb a gyakorlatorientált jelző. Ezt alátámasztja egy közelmúltbeli matematikaoktatással kapcsolatos összejövetel, ahol a felvetett kérdések között külön szerepelt a gyakorlatorientált matematikaoktatás problémája és a matematikának más tárgyakkal való kapcsolata, mintha teljesen eltérő dolgokról lenne szó.

A probléma jobb megközelítése érdekében két külföldi példát mutatok be.

1. Német nyelvterületen az alkalmazásorientált matematikaoktatás (anwendungsorientierter Mathematikunterricht) kifejezés az elfogadott. Egy osztrák matematika tankönyvsorozat (9 – 12. osztály számára) címe Alkalmazott matematika (Angewandte Mathematik). A megfelelő témakörökben előfordulnak fizikai, kémiai, biológiai, földrajzi, közgazdasági jellegű feladatok is.

2. Hollandiából indult el az ún. *„Realisztikus matematikaoktatás"* irányzata. A realisztikus jelző azt jelenti, hogy a matematikai fogalmak, összefüggések bevezetése a valós világból vett problémák fölvetésével kezdődik. A problémák megoldása – aktív tanulói közreműködéssel – és elemzése vezet el a kívánt matematikai ismeretek bevezetéséhez, elsajátításához. Természetesen kiemelt szerepet játszanak a kialakított matematikai fogalmak, összefüggések alkalmazásai is további valós világból vett feladatok megoldásánál.

A realisztikus jelzőt egy másik értelemben is használják: realisztikus jelenti a tanulók által ismert, elképzelhető, megkonstruálható ismereteket.

A fenti két példa alapján szerencsésebbnek tartom az alkalmazásorientált elnevezést, itt persze elsősorban a matematikán kívüli alkalmazásokról van szó.

Miért van szükség alkalmazásorientált matematikaoktatásra?

I. A matematikaoktatás céljairól

A holland matematika-tantervek három célt emelnek ki:

1. Intelligens, kompetens állampolgárrá nevelés. Felkészítés a demokratikus életre.

2. Felkészítés a jövendő tanulmányokra, a jövendő szakmára.

3. A matematikának mint tudománynak a megismertetése.

Az első két pontban markánsan benne vannak az alkalmazások.

II. Motivációs indokok

Egy matematikai szaktanácsadó mesélte el a következő történetet. Egyik tanítványa kérdezte tőle: „Tanár Úr! Az utcán már többször repült felém egy-egy madár, mászott egy-egy bogár, tudom tehát miért kell tanulnom biológiát. De $\sqrt{2}$ még sohasem jött velem szemben, miért kell megtanulnom?" Hivatalos fórumokon nem, de magánbeszélgetéseken egyre több matematikatanár vallja be, hogy tanítványai mind

gyakrabban vetik föl: *Miért kell nekünk ezt megtanulni? Nem látjuk az értelmét.*

Csak remélni merem, hogy egyre kevesebbszer hangzik el a kizárólagos tanári válasz: *Mert az érettségi, felvételi vizsgán szerepelhet ilyen feladat.*

A matematika hasznosságának megmutatása fontos lépés főleg azoknak a tanulóknak irányába, akik nem matematikai jellegű tanulmányokat akarnak folytatni a későbbiekben.

A zsebszámológépek és számítógépek elterjedésével lehetővé válik egyre komplexebb, bonyolultabb valós problémák megoldása, elemzése iskolai szinten is.

Az állampolgárok életét egyre jobban áthatja a matematika. Fontos feladata az iskolának a kompetens állampolgárok nevelése, felkészítése a technológiai társadalomra.

III. Pszichológiai indokok

Valóságos, konkrét szituációból, problémából való kiindulás esetén a problémamegoldás során a tanulók aktivizálni tudják mindennapos ismereteiket, intuicióikat. A kialakítandó matematikai fogalom, összefüggés jelentéssel bíró, értelmes lesz számukra.

Shlomo Vinner izraeli matematika didaktikus vezette be a *fogalomképzet (concept image)* elnevezést a matematikadidaktikai szakirodalomban. Fogalomképzetnek nevezzük a fogalom nevéhez kapcsolt teljes kognitív struktúrát, mely tartalmazza a vizuális reprezentációkat (képek, diagramok, grafikonok), mentális képeket (belső kapcsolatokat) , konkrét tapasztalatokat, példákat , élményeket, tulajdonságokat, eljárásokat.

A valóságból vett példák, tapasztalatok a fenti aspektusok gazdag tárházát jelentik.

A fogalomképzet és fogalomdefiníció ideális kapcsolata Vinner szerint az ábrán látható.

Ez az ideális eset, amikor a tanuló rendelkezik a fogalom meghatározásával (tudja a definícót), amely kölcsönös kapcsolatban van a fogalom kialakult képzetével is. Ez azt jelenti, hogy a problémamegoldás során a tanuló támaszkodik tapasztalataira, szemléletes képekre.

Vinner még további három esetet sorol föl: tisztán formális okoskodás (a fogalom képzete teljesen ki van kapcsolva az okoskodásból), tisztán intuitív okoskodás (a tanuló nem épít a formális definícióra), a tanuló először a fogalom képzetére alapoz, de utána a fogalom definícióját is bevonja az okoskodásba.

Oktatási tapasztalatok szerint, ha a fogalom definícióját nem tudják a tanulók hozzákötni példákhoz, tapasztalatokhoz, gyakran fel sem tudják pontosan idézni azt, vagy csak értelem nélküli, jelentés nélküli bemagolt ismeret lesz számukra.

IV. Világhírű magyar matematika didaktikusok véleménye

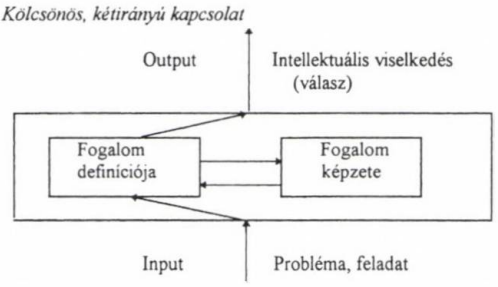
DIENES ZOLTÁN

„A perceptív (észlelési) változatosság vagy többszörös konkretizálás elve.

Célszerű a fogalmi struktúrákat lehetőleg sok ekvivalens, de az észlelés számára különböző formában bemutatni a gyerekeknek, hogy a fogalmak kialakításában minél jobban érvényesülhesenek az egyéni különbségek, és hogy a gyerekek egy-egy fogalom absztrakt matematikai tartalmát minél inkább megragadhassák." (DIENES 1973)

VARGA TAMÁS

„Absztrahálni csak konkrétumokból lehet, s ahhoz, hogy valaki jól tudjon absztrahálni, sokféle konkrétummal kell megismerkednie. A matematika nagyon absztrakt, éppen ez a fő erőssége, hiszen ez azt jelenti, hogy nagyon sokféle konkrét jelenség közös lényegét sűríti magába. Ehhez a nagyon absztrakthoz nagyon konkrét kiindulással tudjuk a legsikeresebben elvezetni



a gyerekeket úgy, hogy elegendő számú és elég változatos konkrét tapasztalatban részesítjük őket." (KLEIN 1980)

PÓLYA GYÖRGY

„...nem szabad semmi olyat elmulasztani, aminek valami esélye van arra, hogy a diákokhoz közelebb hozza a matematikát. A matematika nagyon absztrakt tudomány – éppen ezért nagyon konkrétan kell előadni." (PÓLYA, 1977)

V. Néhány figyelmeztető tapasztalat.

Az alábbiakban az utóbbi évek néhány negatív jelenségét szeretném felidézni.

1. Óraadóként tanítottam a közelmúlban is az egyik elit gimnáziumban Budapesten. Az utolsó években matematikaórán mozgási feladatokat kitűzve nagy volt az ellenkezés a tanulók körében, mondván nem fizikaórán vagyunk, miért kell ilyen feladatokat megoldani. Hasonló fogadtatása volt a keverési feladatoknak is.

2. Több éve rendre kitűzöm egyetemi hallgatóknak a következő feladatot:

Egy hegyről egy felhő 17,5° emelkedési szög alatt, képe pedig a hegy lábánál elterülő tóban 24° depressziószög alatt látszik. Milyen magas a hegy, milyen magasan van a felhő a víz színe fölött, ha a hang terjedési sebessége 340 m/sec, és a dörgés a villámlás után 10 sec múlva hallatszik? (Geometriai feladatok gyűjteménye II. 106)

A megkérdezett több mint száz IV. éves matematika tanárszakos hallgató közül 75-80% a felhő tükörképét a víz felszínére gondolta, és rossz megoldást adott. Amikor az egyik hallgatóval a síkra vonatkozó tükrözést elemeztük, a beszélgetés elején felkiáltott: *De Tanár úr! Tegyük fel, van egy 10 cm mély pocsolya a hegy lábánál. Hogyan férhet el 10 centiméterbe mondjuk egy 350 méter magas hegy képe?*

Ha elemi matematikafoglalkozáson egy egyszerű exponenciális növekedésre adok feladatot – pl. rádióaktív bomlás – nagy a tiltakozás, mondván, ők úgy sem tudnak ilyen feladatot megoldani, adjak helyette szép, trükkös exponenciális egyenletet vagy egyenlőtlenséget, azok megoldására jól vannak kondícionálva.

3. Egy általános iskolában tanító matematikatanár fölmérést végzett általános iskolai, illetve középiskolai tanárok körében arról, hogy mit tartanak fontosnak a matematikatanításban. Egy tizenkét lehetőséget tartalmazó lista alapján az általános iskolai tanárok körében az életszerű feladatok alkalmazása a 8., a középiskolai tanárok körében a 7. helyre került. Bár a fölmérés nagyon szűkkörű volt, csak néhány iskolára terjedt ki, nem hiszem, hogy sokkal előkelőbb helyet kapna országosan e kérdés.

A matematika mint tudomány fontossága

Az alkalmazásorientáció nem jelenti az elméleti matematika elhanyagolását. A holland reformmozgalom irányítói is nagyon fontosnak tartják a pontos matematikai fogalmak kialakítását, az összefüggések bizonyítását, a matematikai általánosításokat. Kétféle matematizációról beszélnek

Horizontális matematizálás

- Az általános szituációkban, kontextusokban a speciális matematika azonosítása
- sematizálás
- a probléma megfogalmazása és képi ábrázolása
- relációk, összefüggések felfedezése
- különböző problémákban az izomorf szempontok észrevétele
- valós probléma transzformálása matematikai problémává
- valós probléma transzformálása egy ismert matematikai modellbe

Vertikális matematizálás

- egy reláció *képletben* való felírása
- összefüggések *bizonyítása*
- modellek finomítása
- különböző modellek használata
- modellek kombinálása, integrációja

– egy új matematikai koncepció *megfogalmazása*
– *általánosítás*

A valós problémák vizsgálata, megoldása, elemzése bizonyos matematikai fogalmakkal, összefüggésekkel kapcsolatos tapasztalatokat, példákat, élményeket jelenthetnek. Sok esetben ezek révén tudja a tanuló a pontos meghatározást felidézni, mivel jobban emlékszik a fogalommal kapcsolatos példákra, tapasztalatokra, élményekre, amelyek aktivizálják a hosszú távú memoriában tárolt fogalomdefiníciókat, összefüggéseket.

Honnan vegyünk feladatokat?

A már említett tanár-továbbképzési alkalmakon a résztvevők nagy szimpátiával fogadták ötleteinket, de aggódva vetették föl a gyakorlatias jellegű példatárak szükségességét. Az alábbiakban erre szeretnék reagálni.

I. A meglevő példatárak feladataiból való válogatás

Sok megfelelő feladat szerepel a használt példatárakban, csak hozzájuk kell nyúlni. Csak egy-egy példát ragadok ki.

1. Geometriai feladatok gyűjteménye I.

Főleg a *Hasonlóság alkalmazása, Pitagorasztétel alkalmazása és a Térgeometriai részben* találhatunk gyakorlatias feladatokat.

Példa

2383. Egy 80 dm^2-es , téglalap alakú bádogból csövet akarunk készíteni. A téglalap egyik oldala a másik oldal 5/8 -ad része. A rövidebb oldalból legyen a cső hossza. Ráhajtásra 2 cm-t szánjunk. Mekkora lesz a cső átmérője és magassága?

2. Geometriai feladatok gyűjteménye II.

E könyvben főleg a trigonometriai témák – *A derékszögű háromszögekkel kapcsolatos szöveges feladatok, A szinusztétel alkalmazása, A koszinusztétel alkalmazása* – feladatai között fordul elő több gyakorlatias is.

3. Matematikai feladatgyűjtemény I.

Számelmélet, aritmetika

258. Egy kerékpár nagyobbik fogaskerekén 35 fog, a kisebbiken 15 fog van. Hányszor kell a pedált körbeforgatni, hogy mindkét fogaskerék újra a kiindulási helyzetbe kerüljön vissza?

Egyenletek, egyenlőtlenségek, egyenletrendszerek, egyenlőtlenségrendszerek (lineáris programozás)

Sok megfelelő szöveges feladat szerepel a példatárban.

Kombinatorika

136. A BKV járművein a jegyeket olyan lyukasztókkal kezelik, melyek a lehetséges 9 számnégyzetből 2, 3, illetve 4 mezőt kilyukasztanak. Hányféleképpen állíthatók be ezek a lyukasztók a fenti követelményeknek megfelelően?

4. Matematikai feladatgyűjtemény II.

Függvények szélsőértéke

262. Ismert tény, hogy egy gerenda teherbírása egyenesen arányos a keresztmetszet hosszúságával és szélességének a négyzetével. Határozzuk meg a d cm átmérőjű hengeres fatörzsből készíthető legteherbíróbb gerenda keresztmetszetének a méreteteit!

Integrálszámítás

212. Mekkora munkát végzünk, ha 6 cm-rel nyújtunk meg egy olyan rugót, amelyet 2 N erő 1 cm-rel nyújt meg?

Valószínűségszámítás. Matematikai statisztika

5. Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából

Egyenlettel vagy egyenletrendszerrel megoldható szöveges feladatok. Geometriai számítások. Térfogat- és felszínszámítás. Számtani és mértani sorozatok. Kamatos kamatszámítás.

3489. Egy színházi nézőtéren 30 sor van. Minden sorban 2-vel többen férnek el, mint az előzőben. Hány ember fér el a nézőtéren , ha a 15. sorban 50 férőhely van ?

Összefoglalva szeretném megjegyezni, hogy az említett, ma használatos példatárakban találhatunk gyakorlatias feladatokat, bár el kell ismerni, hogy más szem-

pontok alapján készültek, tehát messze nem kielégítő az itteni kínálat.

II. Környezetünkből vett feladatok

Egy esti tagozatos tanítványom általános iskolában tanított. Diplomamunkáját nálam írta, közben többször megjegyezte problémaként, hogy a házukat tatarozzák, sok az elfoglaltsága. Szakdolgozatának témája feladatsorozatok összeállítása volt, s felvetettem a tatarozást mint lehetséges feladattémát. Megbeszéltük a lehetséges feladattípusokat – tető cserepezése, különböző cserépkínálat a TÜZÉP telepeken, szállítási variációk, ácsmester ajánlata, a tetőcserepezés költségei, csempézés, vakolás, OTP kölcsön fölvétele stb. Két órára való feladatot állított össze. Tanulói nagy örömmel fogadták e feladatokat. Tanár néni! Máskor is oldjunk meg hasonló feladatokat! – kérték tanárnőjüket. A szóbanforgó tatarozást naponta személyesen látták a tanulók, örültek annak, hogy olyan dologgal foglalkozhatnak matematikaórán, amit látnak, tapasztalnak, ami a valóságban is előfordul.

A közelmúltban egy híres gimnázium kitűnő matematikatanára fordult hozzám segítségért. Egy posztgraduális tanfolyamon vesz részt, és kért tőlem gyakorlatias jellegű feladatokat, melyeket a tanfolyamon kellett bemutatni, elemezni. Néhány konkrét feladat mellett felhívtam a figyelmét arra, hogy a környezetében, a saját városában nézzen utána aktuális, releváns feladatoknak. Biztosítási lehetőségek a helyi biztosítóknál, takarékossági lehetőségek a város bankjaiban – betétek, kötvények, értékpapírok. Mobil szolgáltatások, a különböző ajánlatok összevetése. Vezetékes telefondíjak, energiadíjak, vízdíj. Osztálykirándulás tervezése stb. Örömmel reagált a javaslatomra, hogy ő is gondolt ilyen feladatokra, de egyedül nem mert dönteni.

Tudom, hogy a tanárok többsége központi feladatgyűjteményeket vár, de látnunk kell ezek veszélyeit is. A legnagyobb probléma az, hogy pár év alatt elévülnek az adatok. Meglehetősen furcsa a tanulók számára, ha 10 forintos kenyérár, 3000 forintos kabátár, vagy frissebb példát is említve, 30%-os kamat szerepel a feladatban, és neki ezen elavult adatokkal kell megoldania a feladatokat. A tanároknak ki kell javítani az elavult adatokat, sőt ebbe bevonhatják a tanulókat is. Menjenek el a biztosítóhoz, a bankba, az áruházba és gyűjtsék össze a megfelelő adatokat.

Kellenek feladatgyűjtemények, melyek mintául szolgálhatnak a tanároknak. De a javasolt feladatokat aktualizálni, módosítani, kiterjeszteni, az adott tanulócsoporthoz kell igazítani.

Nagy a felelőssége az érettségi vizsgafeladatok összeállítóinak is, vigyázniok kell arra, hogy az esetlegesen kitűzött gyakorlatias jellegű feladatban az adatok aktuálisak legyenek.

A másik veszély abban van, hogy a tanárok a feladatgyűjtemény feladatainak megoldását trenírozzák, melyek sok esetben különleges trükköket is tartalmazhatnak, de mivel előfordulhatnak a vizsgán, a meglepetések elkerülése miatt ezeket feltétlenül megtárgyalják. A problémát az jelenti, hogy olyan alapvető matematikai tevékenységek, mint a probléma elemzése, tervkészítés, indukció, általánosítás, analógia, specializálás, célirányos okoskodás, fordított irányú okoskodás, heurisztikus stratégiák tudatosítása háttérbe szorulnak, holott a matematikatanítás, tanulás elsődleges célja a képességfejlesztés, és nem csak bizonyos típusfeladatok megoldására való felkészítés.

Megjegyzés

A magyar matematikaoktatásban hagyománya van meseszerű elemek használatának . (Bergengócia, Óriások földje, Lilliputi, Piripócs, Kukutyin, Hencida , Boncida stb.) Kétségtelen tény, hogy az ilyen feladatok megoldásai is megkövetelik a megfelelő matematikai modell megtalálását, azaz a modellalkotási tevékenységet, de nem pótolják a valóságos problémákat, melyek közvetlenül is érint(het)ik a tanulókat, így azokat jobban akceptálhatják.

A valóságból vett feladatok funkciói a matematikaórákon, a matematikatanulási folyamatban

A gyakorló tanár szempontjából gondot okozhat, hogy a feladatgyűjteményekben a feladatok csak tematikusan vannak rendezve. Fölmerül a probléma, az oktatási folyamat milyen fázisában célszerű az adott feladatot tárgyalni. Az alábbiakban három funkciót mutatunk be, egy- egy példával.

1. Problémafölvető, bevezető feladatok. Új ismeret bevezetésének szükségessége

Példa

Pitagorasz-tétel tárgyalásához bevezető, problémafölvető feladat.

A szoba sarkában áll egy kerek asztal, mely lapjának átmérője 2,10m. Kivihető ez az asztallap egy 195 cm × 90 cm-es ajtón?

A feladatot a tanulók nem tudják megoldani előző ismereteik alapján, csak igen nehézkes, pontatlan lehetőségük van (méretarányos szerkesztés). Fölmerül a probléma, jó lenne a derékszögű háromszög oldalai között kapcsolatot keresni.

II. A probléma megoldása elvezet egy új fogalom, összefüggés értelmezéséhez, bevezetéséhez.

1. példa

Exponenciális függvény bevezetése (Angewandte Mathematik 2, Hölder-Pichler-Tempsky Verlag Wien 1990)

Egy biológus megfigyelte, hogy egy baktériumtenyészet felülete óránként közelítőleg 45%-kal nő. Határozzuk meg a felület nagyságát 1, 2, 3, 4, 5, ..., *n* óra alatt, ha a megfigyelés kezdetekor 1000 mm² a felület.

$A(1) = 1000 \cdot 1{,}45 = 1450$

$A(2) = A(1) \cdot 1{,}45 = 1000 \cdot 1{,}45^2$

$A(3) = A(2) \cdot 1{,}45 = ...$

.....

$A(n) = 1000 \times 1{,}45^n$

Az a feltevés, hogy az óránkénti növekedés 45%-os, az $A(n) = A(0) \cdot 1{,}45^n$ képlethez vezet.

Fordított irányban egy ilyen formulából levezethető , hogy a növekedés 45%-os.

$$A(n+1) = A(0) \cdot 1{,}45^{n+1} =$$
$$= A(0) \cdot 1{,}45^n \cdot 1{,}45 = A(n) \cdot 1{,}45$$

Érdemes fölvetni azt a kérdést, hogy vajon nem csak az óránkénti növekedés állandó-e? A következő feladatok megmutatják, hogy minden fél-, negyedórában, illetve minden azonos időintervallumban a növekedés mértéke megegyezik. Ehhez föl kell tenni, hogy az

$A(n) = A(0) \cdot 1{,}45^n$ formula nem egész értékekre is teljesül.

Feladat

a) Számítsa ki az $A(n) = A(0) \cdot 1{,}45^n$ képlet alapján, hogy mekkorára nő a felület félóra elteltével.

b) Mutassa meg, hogy a 2., 3., 10. félórában is ugyanaz a növekedés százalékos mértéke.

c) Mutassa meg, hogy bármely félórában ugyanaz a százalékos növekedés.

A *c)* feladat megoldása

$$A(t+0{,}5) = A(0) \cdot 1{,}45^{t+0{,}5} =$$
$$= A(0) \cdot 1{,}45^t \cdot 1{,}45^{0{,}5} = A(t) \cdot 1{,}204$$

Feladat

Mekkora a növekedés negyedóránként?

Feladat

Mutassa meg, hogy egyenlő időközökben egyenlő a növekedés mértéke.

$A(t+h) = A(0) \cdot 1{,}45^{t+h} = A(0) \cdot 1{,}45^t \cdot 1{,}45^h$

Tehát bármely $(t, t+h)$ időintervallumban 1,45 h mértékű a felület növekedése.

A természetben és a technikában sok olyan jelenség van, melyekre valószínűsíthető az a feltevés, hogy a növekedés mértéke állandó. Az ilyen jelenségek az $A(t) = c \cdot a^t$ és az $A(t+1) = A(t) \times a$ összefüggésekkel jellemezhetők.

Definíció: Egy f valós függvényt, melyre teljesül $f(x) = c \cdot a^x$ (*c* valós szám, *a*

pozitív valós szám), exponenciális függvénynek nevezzük.

2. példa Várható érték fogalmának bevezetése (Mathematik heute Grundkurs Stochastik, Schroedel Verlag 1994)

Feladat

Egy játékautomata úgy van megkonstruálva, hogy az alábbi nyereményeket adja ki

Nyeremény DM	Valószínűség
0	0,25
0,20	0,4
0,50	0,2
1	0,1
2	0,05

a) Mennyi nyeremény várható játékonként?

Megoldás

Tegyük fel, hogy n játékra került sor. (n nagy számot jelent) Ekkor közelítőleg $0{,}25n$ játék nem hozott nyereményt, $0{,}40n$ játéknál 20 Pfennig, $0{,}20n$ játéknál 50 Pfennig, $0{,}10n$ játéknál 1 DM, $0{,}05n$ játéknál 2 DM volt a nyeremény játékonként.

Nyereményátlag

$$\frac{0{,}25n \cdot 0 + 0{,}40n \cdot 0{,}20 + 0{,}20n \cdot 0{,}50 + 0{,}10n \cdot 1 + 0{,}05n \cdot 2}{n} =$$

$$= 0{,}25 \cdot 0 + 0{,}40 \cdot 0{,}20 + 0{,}2 \cdot 0{,}50 + 0{,}1 \cdot 1 + 0{,}05 \cdot 2 = 0{,}38$$

b) **Egy játék 0,50 márkába kerül. Ha a valószínűségi változó: a nyeremény összege egy adott játékban, akkor mi lesz a valószínűségi változó eloszlása? Átlagban mennyi nyeremény várható?**

Nyeremény (DM)	Valószínűség
– 0,50	0,25
– 0,30	0,4
0	0,2
0,50	0,1
1,50	0,05

Legyen a járékok száma n elegendően nagy szám. Ekkor az n játékból $0{,}25n$ esetben nem nyertünk semmit, azaz a nyeremény (veszteség) – 0,50 DM. Hasonlóan $0{,}4n$ esetben csak 0,20 DM a nyereség, azaz valójában vesztettünk 30 Pfenniget, azaz – 0,30 DM a nyereség. Analóg módon vizsgájuk a többi esetet is.

Nyereményátlag =

$$\frac{-0{,}50 \cdot 0{,}25n - 0{,}30 \cdot 0{,}4n + 0 \cdot 0{,}2n + 0{,}50 \cdot 0{,}1n + 1{,}50 \cdot 0{,}05n}{n} =$$

$$= -0{,}50 \cdot 0{,}25 - 0{,}30 \cdot 0{,}4 + 0 \cdot 0{,}2 + 0{,}50 \cdot 0{,}1 + 1{,}5 \cdot 0{,}05 = -0{,}12$$

Játékonként átlagban 12 Pfennig veszteséggel lehet számolni.

Definíció: Egy X valószínűségi változó az a_1, a_2, ..., a_n értékeket $P(X = a_1)$, $P(X = a_2)$, ..., $P(X = a_n)$ valószínűséggel veszi föl. Az $a_1 \cdot P(X = a_1) + a_2 \cdot P(X = a_2) + \ldots + a_m \cdot P(X = a_m)$ szorzatösszeget a X valószínűségi változó $E(X)$ várható értékének nevezzük.

III. A matematikai összefüggések alkalmazása valóságból vett feladatok megoldásában.

Ez az aspektus leginkább jellemző matematikaoktatásunkra, azaz elsősorban az oktatási folyamat begyakorló, alkalmazó fázisában használnak a tanárok ilyen feladatokat.

Egy feladatot azért tartok célszerűnek egy német tankönyvből bemutatni, hogy illusztrálhassam: a valóságból vett feladatoknál a szükséges információkat a feladat szövegébe be kell építeni, ettől még a modellalkotás folyamatát a tanulónak kell elvégeznie.

Az emberi vérben normális esetben 0,01 ezrelék alkohol van. Az ezen mennyiség feletti alkoholt a máj felbontja, azonos időszakonként közelítőleg azonos arányú mennyiséget. Egy alkoholos ital felvétele után a szervezetben levő alkoholmennyiség óránként 20%-ával csökken.

a) Adjon meg egy egyenletet a véralkohol koncentráció csökkenésére az idő függvényében.

b) Ábrázolja az alkoholfelbomlás folyamatát, ha a kezdeti koncentráció 1,4, illetve 2,5 ezrelék.

c) Valaki este 23 órakor 2,1 ezrelékes véralkohol koncentrációval fekszik le. Hány óra múlva éri el szervezete a normális véralkohol szintet? (Mathematik 10, Oldenbourg Verlag 1996)

Irodalom

[1] Ambrus, A. 1995 Bevezetés a matematikadidaktikába. Eötvös Kiadó Budapest

[2] Borbély, J. 2001 Az átmenet nehézségei Szakdolgozat ELTE TTK

[3] Dienes, Z. 1973 Építsük fel a matematikát Gondolat Budapest 66. oldal

[4] Klein, S. 1980 A komplex matematikatanítási módszer pszichológiai hatásvizsgálata Akadémiai Kiadó Budapest 44 - 45. oldal

[5] Pólya, Gy. 1977 A gondolkodás iskolája 236. oldal

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: **Kosztolányi József**

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2002. május 31.

195. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

egyenletnek végtelen sok egész megoldása van!

196. Hányféleképpen lehet egyrétűen és hézagmentesen lefedni egy $2n$ (n pozitív egész) oldalhosszúságú négyzetet $4n^2$ darab fekete és $4n^2$ darab fehér egységnyi befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszöggel úgy, hogy az élben szomszédos háromszögek különböző színűek legyenek?

197. Ha az $y = x^2$ egyenletű parabola két érintője 45°-os szöget zár be egymással, akkor milyen kapcsolat van az érintési pontok abszcisszái között?

Fitos László, Esztergom

198. Az $ABCD$ paralelogrammában az AC átló merőleges az AB oldalra. Az AD oldal P pontjából elindul egy teknősbéka AB-vel párhuzamosan az AC átló felé, s miután a $Q \in AC$ pontba ér, útját a BC oldalra merőleges irányban folytatja. Az $R \in BC$ pontból AB-vel párhuzamosan visszafelé az $S \in AC$ pontig megy, majd innen AD-re merőleges irányban haladva a $T \in AD$ pontba ér. A P pont mely helyzetére teljesül, hogy $P=T$?

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

199. Igaz-e, hogy egy 50 fős társaságban mindig van két olyan ember, akiknek páros sok (esetleg 0) közös ismerőse van a társaság tagjai között? (Az ismerettség szimmetrikus reláció.)

Feladatmegoldások (180-184. feladatok)

180. Tíz egyforma érmét elhelyeztünk egy körvonal mentén úgy, hogy mindegyik érmén a „fej" van felül. A következő két mozgatás megengedett:

(1) négy szomszédos érmét megfordítunk;

(2) öt szomszédos érme közül a középsőt válto-

zatlanul hagyjuk, a többi négyet megfordítjuk. A fenti változtatások véges sokszori alkalmazásával elérhető-e, hogy mind a tíz érmén az „írás" legyen felül?

I. megoldás: Minden második érmének a „fej" oldalát fessük be pirosra. Így kezdetben páratlan sok (5 db) piros érmét látunk. Mindkét típusú forgatásnál 2 db, azaz páros sok piros oldalú érmét forgatunk, így a felül lévő piros érmeoldalak száma páros számmal változik: 2 piros megjelenik, 2 piros eltűnik, illetve 1-1 megjelenik és eltűnik. Ha a megengedett forgatások véges sokszori alkalmazása után az „írás" oldal lenne felül, akkor egyetlen piros érmét sem látnánk, s mivel 5 és 0 különbsége páratlan, ezért ezt lehetetlen elérni.

Nagy Béla, Sarkad
Schmidt Edit, Budapest

II. megoldás: Számozzuk meg az érmék „fej" oldalát 1-től 10-ig, az „írás" oldalra pedig írjuk rá a „fej" oldalon álló szám ellentettjét. Egy érme megfordítása a felül lévő szám paritásán nem változtat. Minden egyes állapothoz rendeljük hozzá az érméken látható (előjeles) számok összegét. Ez az induláskor 55. Egy érme megfordítása, amennyiben az érmén a k szám van, az összeget (-2k)-val változtatja meg. Akár az (1), akár a (2) mozgatást végezzük, két páros és két páratlan számot változtatunk az ellentettjére. Két páros és két páratlan összege páros, kétszerese 4-gyel osztható, tehát egy mozgatással az érmékhez rendelt összeg egy 4-gyel osztható számmal változik. A kezdő helyzetből a „mindegyik írás" állapotába való eljutáshoz az érméken felül lévő összegnek 110-zel kellene csökkenie. 110 nem osztható 4-gyel, így a kívánt állapot nem érhető el.

Kamarás Lajos, Pécs
Simon József, Csíkszereda

III. megoldás: Az érmék helyét számozzuk meg 1-től 10-ig, és legyen $a_i = 1$, ha az i-edik helyen álló érmén a „fej" van felül, $a_i = 0$, ha az i-edik helyen álló érmén az „írás" van felül. Az egyes állapotok jellemzésére tekintsük az

$$S = \sum_{i=1}^{10} i a_i$$

összeget. Ez kezdetben 55, ha pedig mindenütt „írás" lenne felül, akkor 0 lenne. Ez az állapot a megengedett szabályok szerint azonban nem érhető el. Mind a két megengedett lépés során ugyanis két páros és két páratlan helyen álló érmét fordítunk meg, tehát az összeget páros számmal változtatjuk, így viszont 55-ből nem kaphatunk 0-t.

Csorba Ferenc, Győr
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

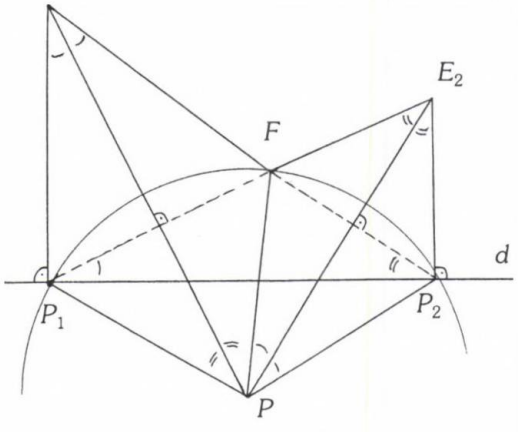
Megjegyzés: A fenti módszerek bármelyikével bizonyítható, hogy $n=4k+1$ vagy $n=4k+2$ érme esetén a feladatbeli lépésekkel nem érhető el a „csupa fej" állapotból a „csupa írás" állapot.

Simon József, Csíkszereda
Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 10.

181. Egy F fókuszpontú parabolához egy külső P pontból két érintőt húzunk, az érintési pontok E_1 és E_2. Bizonyítsuk be, hogy a PF szakasz hossza az FE_1 és FE_2 szakaszok hosszának mértani közepe!

Fitos László, Esztergom



1. ábra

I. megoldás: Jelölje F a parabola fókuszpontját, d a vezéregyenesét, E_1 és E_2 az érintési pontokat, P_1 és P_2 pedig a megfelelő érintési pontoknak a vezéregyenesre eső merőleges vetületeit *(1. ábra)*.

Közismert tény, hogy a PE_1 érintő felezi az FE_1P_1 szöget, a PE_2 érintő pedig felezi az FE_2P_2 szöget. Ebből és a parabola definíciójából adódik, hogy az E_1P_1PF és E_2P_2PF négyszögek deltoidok, amiből következik, hogy P a P_1P_2F háromszög köréírt körének középpontja.

Az érintő szögfelező tulajdonságából adódóan $FE_2P\sphericalangle = PE_2P_2\sphericalangle$. A PE_2P_2 szög és az FP_2P_1 szög merőleges szárú hegyesszögek, ezért $PE_2P_2\sphericalangle = FP_2P_1\sphericalangle$. Az FP_2P_1 szög a P_1P_2F háromszög köréírt körének P_1F ívéhez tartozó kerületi szög, ezért $2 \cdot FP_2P_1\sphericalangle = FPP_1\sphericalangle$ a kerületi és középponti szögek tételéből adódóan. Mivel az E_1P_1PF négyszög deltoid, ezért $E_1PF\sphericalangle = FP_2P_1\sphericalangle = FE_2P\sphericalangle$.

Hasonlóan látható be, hogy $FE_1P\sphericalangle = E_2PF\sphericalangle$. Ezen két-két szögpár egyenlőségéből pedig következik, hogy FE_1P háromszög hasonló az FPE_2 háromszöghöz. A megfelelő oldalak aránya

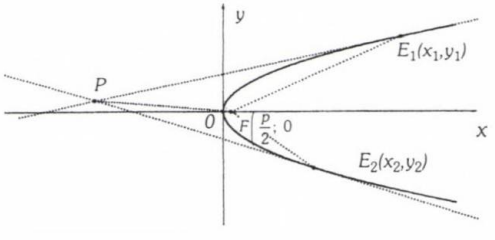
$$\frac{PF}{FE_1} = \frac{FE_2}{PF}$$

amiből következik a feladat állítása.

Több megoldás alapján

II. megoldás: Legyen a parabola *(2. ábra)* tengelyponti egyenlete $y^2=2px$.

A parabola fókuszpontja $F\left(\frac{p}{2};\ 0\right)$.



2. ábra

Ha az érintési pontok $E_1(x_1;\ y_1)$ és $E_2(x_2;\ y_2)$, akkor fennállnak az

$$y_1^2 = 2px_1 \text{ és } y_2^2 = 2px_2 \qquad (1)$$

összefüggések. A $P(x;\ y)$ pontot az E_1 és E_2 pontokba húzott érintők metszéspontjaként kapjuk, így koordinátáit az érintők egyenleteiből álló egyenletrendszer megoldásával határozhatjuk meg. Az érintők egyenletei:

$$y_1y = p(x + x_1)$$
$$y_2y = p(x + x_2).$$

Az egyenletrendszert megoldva kapjuk, hogy a P pont koordinátái:

$$x = \frac{y_1y_2}{2p} \text{ és } y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \qquad (2)$$

ahol a megoldás során figyelembe vettük az (1) összefüggéseket.

Az állításban szereplő távolságok most már könnyen számolhatók. A következőket kapjuk (a részletes számításokat most elhagyjuk):

$$PF = \frac{\sqrt{(y_1^2 + p^2)(y_2^2 + p^2)}}{2p}, \qquad (3)$$

$$FE_1 = \frac{y_1^2 + p^2}{2p}, \qquad (4)$$

$$FE_2 = \frac{y_2^2 + p^2}{2p}, \qquad (5)$$

A bizonyítandó állítás (3), (4) és (5) következményeként adódik.

Dályay Pál Péter, Szeged

Megjegyzés: A feladat megegyezik *Rácz János: Matematika (feladatok-ötletek-megoldások)* I. - Tankönyvkiadó, Budapest, 1990. – című könyv 263. feladatával.

Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 16.

182. Az ABC hegyesszögű háromszög szögei α, β, γ. Mutassuk meg, hogy a következő három másodfokú egyenlet mindegyikének gyökei valósak:

$$2x^2\cos\alpha + x\cos(\alpha - \beta) + \cos\beta\cos\gamma = 0$$

$$2x^2\cos\beta + x\cos(\beta-\gamma)+\cos\gamma\cos\alpha = 0$$

$$2x^2\cos\gamma + x\cos(\gamma-\alpha)+\cos\alpha\cos\beta = 0$$

Bencze Mihály, Brassó

Megoldás: Az állításnál többet látunk be, ugyanis belátjuk, hogy bármely nem derékszögű háromszög esetén valósak lesznek a fenti másodfokú egyenletek gyökei. (Derékszögű háromszög esetén az egyik egyenlet elsőfokú.)

Tekintsük az első egyenlet diszkriminánsát.

$$D = \cos^2(\alpha-\beta) - 8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma =$$
$$= \cos^2(\alpha-\beta) + 8\cos\alpha\cos\beta\cos(\alpha+\beta) =$$
$$= (\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta)^2 +$$
$$+8\cos\alpha\cos\beta(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) =$$
$$= 9\cos^2\alpha\cos^2\beta - 6\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta +$$
$$+\sin^2\alpha\sin^2\beta = (3\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta)^2 \geq 0$$

A másik két egyenletet úgy kapjuk, hogy α, β, és γ megfelelő ciklikus permutációját vesszük. Ezekre az egyenletekre hasonlóan belátható, hogy a diszkriminánsuk nem negatív.

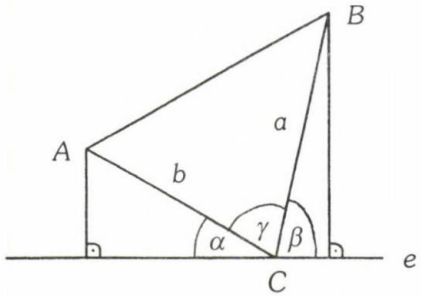
A fenti egyenletek gyökei tehát mindig valós számok.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 14.

183. *A, B* és *C* a sík három pontja. Szerkesszünk olyan *C*-re illeszkedő egyenest a síkon, amelyre nézve teljesül, hogy az *A* és *B* pontoktól vett távolságának szorzata maximális!

Megoldás: Könnyen látható, hogy ha *A, B* és *C* egy egyenesre illeszkednek, akkor a keresett egyenes a pontok egyenesére *C*-ben állított merőleges.



3. ábra

Tegyük fel a továbbiakban, hogy a három adott pont nem illeszkedik egy egyenesre. Vegyünk fel *C*-n keresztül egy *e* egyenest úgy, hogy *A* és *B* *e*-nek ugyanazon oldalán legyen *(3. ábra)*.

Az ábra jelöléseit használva a kérdéses szorzat

$$ab\sin\alpha\sin\beta = ab\sin\alpha\sin(\alpha+\gamma) =$$
$$= \frac{ab}{2}(\cos\gamma - \cos(\gamma+2\alpha)),$$

aminek maximuma

$$\frac{ab}{2}(\cos\gamma + 1).$$

Ezt

$$\alpha = \frac{\pi-\gamma}{2}$$

esetén veszi fel, azaz ha *e* az *ACB* szög mellékszögének szögfelezője.

Ha *e*-t úgy vennénk fel, hogy az *A* és *B* pontokat elválassza egymástól, akkor az előzőhöz hasonló számításokkal arra jutnánk, hogy a szorzat maximuma

$$\frac{ab}{2}(1-\cos\gamma),$$

és ezt pontosan akkor veszi fel, ha *e* az *ACB* szög felező egyenese.

Kapott eredményeinkből látható, hogy

$$\gamma < \frac{\pi}{2}$$

esetén az *ACB* szög mellékszögének felező egyenese,

$$\gamma > \frac{\pi}{2}$$

esetén az *ACB* szög felező egyenese a keresett egyenes. Ha

$$\gamma = \frac{\pi}{2}$$

akkor mindkét egyenes megoldása a feladatnak.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: A $\sin\alpha\sin\beta$ szorzat felülről becsülhető a számtani és mértani közép közötti egyen-

lőtlenség és a Jensen-egyenlőtlenség segítségével is ($\sin\alpha \geq 0$, $\sin\beta \geq 0$ és a $\sin x$ függvény konkáv a $[0;\pi]$ intervallumon):

$$\sqrt{\sin\alpha \sin\beta} \leq \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{2} \leq \sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right).$$

Mivel $\alpha + \beta = \pi - \gamma =$ állandó, ezért a tekintett szorzat pontosan akkor maximális, ha α és β megegyezik.

Vörös Zoltán, Tiszavasvári

A megoldók száma: 12.

184. Bizonyítsuk be, hogy bármely pozitív egész n esetén érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 < \frac{4^n}{\sqrt{3n}}!$$

Megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala:

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

Ez könnyen belátható kombinatorikai úton is. Ha van $2n$ darab golyónk, amelyek közül n darab piros és n darab kék, akkor ezek közül n darabot az összes lehetséges módon kiválasztva, és ezen kombinációk számát kétféleképpen összeszámlálva, adódik a fenti összefüggés.

A bizonyítandó egyenlőtlenségnél erősebbet fogunk belátni. Teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy

$$\binom{2n}{n} \leq \frac{4^n}{\sqrt{3n+1}},$$

amiből az eredeti állítás következik.

$n = 1$ esetén igaz az állítás, benne az egyenlőség érvényes.

Tegyük fel, hogy valamely $n \geq 1$ esetén teljesül az állítás, és vizsgáljuk $n + 1$ esetére. Azt szeretnénk belátni, hogy

$$\binom{2n+2}{n+1}\cdot\sqrt{3(n+1)+1} \leq 4^{n+1}.$$

Alakítsuk a bal oldalt, és alkalmazzuk az indukciós feltevést:

$$\binom{2n+2}{n+1}\cdot\sqrt{3n+4} =$$
$$= \binom{2n}{n}\cdot\frac{(2n+1)(2n+2)}{(n+1)(n+1)}\cdot\sqrt{3n+4} =$$
$$= \frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}\cdot\sqrt{3n+1}\cdot\sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}} \leq$$
$$\leq \frac{2(2n+1)}{n+1}\cdot 4^n\cdot\sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}}.$$

Azt kell megmutatnunk, hogy

$$\frac{2n+1}{n+1}\cdot\sqrt{\frac{3n+4}{3n+1}} \leq 2.$$

Négyzetre emelés, majd a bal oldal nevezőjével történő beszorzás után kapjuk, hogy

$$12n^3 + 28n^2 + 19n + 4 \leq$$
$$\leq 12n^3 + 28n^2 + 20n + 4,$$

ez pedig nyilvánvalóan teljesül.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: A feladat állításánál erősebb is bizonyítható. Be lehet látni, hogy

$$\frac{4^n}{\sqrt{n\pi + \frac{\pi}{2}}} < \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2 < \frac{4^n}{\sqrt{n\pi}}.$$

Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely

A megoldók száma: 10.

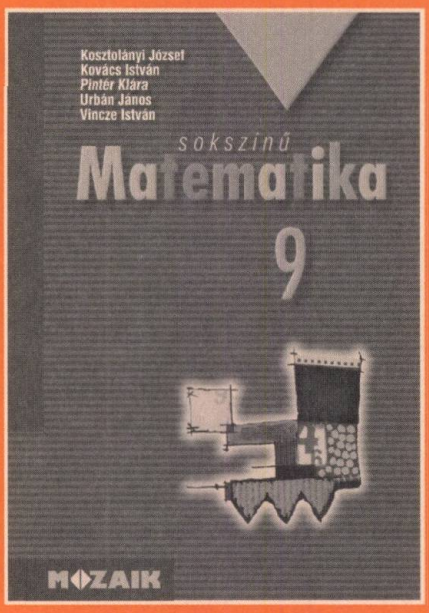
A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (180., 181. 2 mód, 182.); Dályay Pál Péter, Szeged (180. 2 mód, 181-184.); Kamarás Lajos, Pécs (180-183.); Kiss Géza, Kisújszállás (181-184.); Kiss Zoltán, Pécs (180-184.); László Sándor, Szombathely (181. 2 mód, 182., 183. 2 mód, 184.); Nagy Béla, Sarkad (180-184.); Rakonczai György, Budapest (180-184.); Schmidt Edit, Budapest (180-183.); Schuler László, Budapest (181-183.); Simon József, Csíkszereda (180-182.); Tóth Sándor, Sárospatak (181-184.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (180-184.); Udvari Tibor, Baja (181., 184.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (180-184.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (181.).

KERETTANTERV SZERINTI ÚJ MATEMATIKA TANKÖNYVEK

Az új, 1–12. évfolyamot átfogó

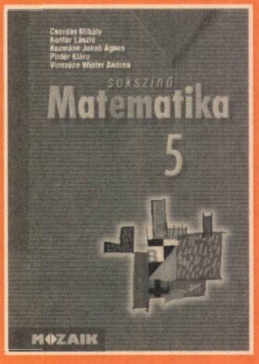
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA

tankönyvsorozat új színfoltot jelenthet a matematikaoktatásban. A kerettanterv alapján készülő tankönyvek tartalmukban és felépítésükben is korszerűek, játékos és gyakorlatias módon dolgozzák fel a tananyagot. A kötetek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.



A kötetek szerzői: *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

KÖNYVAJÁNLAT A MATEMATIKA TANÍTÁSÁHOZ



MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

Rekurzív sorozatok és a geometriai sor

(Máté László)

Püthagoraszi üzenet

(Ringler András)

A Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyekről

(Dr. Kántor Sándorné)

X. ÉVFOLYAM 2002 3

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Oktatási Stúdió Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Oktatási Stúdió
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 1100 Ft

A lap megvásárolható a MOZAIK Könyvesboltokban:
Szeged, Csongrádi sgt. 73.
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Rekurzív sorozatok és a geometriai sor
Máté László docens, Budapest

Püthagoraszi üzenet
Ringler András egyetemi docens,
SZTE, Orvosi Fizika Oktatási Csoport

A Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyekről
Dr. Kántor Sándorné adjunktus, Debrecen

Beszámoló a XI. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről
Dr. Urbán János

A XXXI. Országos Kalmár László Verseny megyei fordulójának feladatai és megoldásai (5-8. osztály)

A tanárképző főiskolák 2002. évi Péter Rózsa Matematikaversenyén kitűzött feladatok

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Máté László

Rekurzív sorozatok és a geometriai sor

1. rész

Az emberek többsége vizuális természetű, főleg képek, vizuális élmények ragadják meg gondolkodását, ezért mindenképpen hasznos a matematikai fogalmakat és összefüggéseket valamiféle vizuális élménnyel összekapcsolni. A következőkben a geometriai sorhoz fogunk hozzákapcsolni egy vizuális modellt, amely a geometriai sorral kapcsolatos alapvető tudnivalókat új megvilágításba helyezi, és talán hasznosan egészíti ki a szokásos, tradicionális tárgyalásmódot.

A vizuális modell ötlete nem új, de sokak által nem ismert, és hasznos lehet a geometriai sorok oktatásában többek között azért is, mert hozzájárulhat a mai matematikában olyan fontos dinamikus rendszermodell előkészítéséhez.

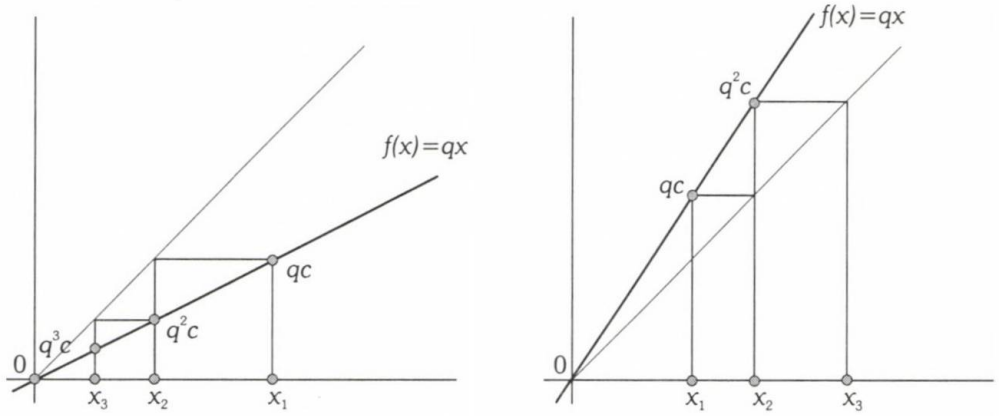
2. rész

Egy q hányadosú geometriai sorozat elemeit megkaphatjuk az $f(x) = qx$ függvényből is, mégpedig úgy, hogy egy c értéket helyettesítünk be a függvénybe, majd a kapott (függvény)értéket újra behelyettesítjük, és ezt ismételjük újra meg újra. Ez az eljárás a matematika nyelvén így írható le:

$$(*) \qquad x_0 = c, \quad x_{n+1} = qx_n \quad n = 1, 2,...$$

vagyis az eljárással egy olyan sorozatot kapunk, amelynek minden eleme az őt megelőző elem q-szorosa. És ez éppen a geometriai sorozat.

A (*) formulával leírt eljárásnak az *1. ábrán* látható geometriai szerkesztés felel meg. Az *1. ábrán* látható vizuális modellben megjelennek a geometriai sorozat elemei, mint egymás után sorakozó egyenes szakaszok, és látható, hogy $0 < q < 1$ esetén a sorozat elemei monoton csökkennek, és tetszőlegesen közel kerülnek a 0-hoz, viszont $q > 1$ esetén monoton nőnek, és tetszőlegesen naggyá válnak, ha elég messze megyünk a sorozatban.



1. ábra

A (*) formulával megadott sorozat egy rekurzív módon megadott sorozat, vagy röviden rekurzív sorozat. Ha a sorozatot rekurzív módon adjuk meg, akkor azt a szabályt adjuk meg, amellyel a sorozat elemeit a megelőző elemből előállítjuk. Vagyis egy rekurzív sorozatban azt a szabályt olvashatjuk le, amellyel a sorozat n-ik eleméből az utána következő $n+1$-ik elemet megkapjuk.

(A (*) sorozat szokásosabb alakban: c, qc, q^2c, . . . , $q^{n-1}c$, ...)

3. rész

Ezek után természetes ötlet, hogy megvizsgáljuk, mi lesz annak az eredménye, ha a leírt eljárást az

$$f(x)=ax+b$$

(általános) elsőfokú függvénnyel végezzük el *(2. ábra)*. Ekkor az $f(x)$-hez tartozó rekurzív sorozat

(**) $\quad x_0= c,\ x_n=ax_{n-1}+ b,\ n = 1, 2, ...$

vagyis

$$x_1 = ac + b,$$
$$x_2 =a(ac+b)+b=a^2c+ab+b,$$
$$x_3 = a(a^2c+ab+b)+b=a^3c+a^2b+ab+b$$

és így tovább.

Teljes indukcióval

$$x_n = a^nc + a^{n-1}b + ... ab + b$$

amely $c = 0$ mellett éppen a b kezdetű és a hányadosú geometriai sor n-ik részletösszege.

4. rész

A 2. ábrából rögtön leolvasható, hogy az a hányadosú (és b kezdetű) geometriai sor az

$$x=ax+b$$

egyenlet x megoldásához konvergál $0 < a < 1$ esetén. Ugyanis $x = ax + b$ pontosan ott, ahol az $y = ax+b$ és az $y = x$ egyenesek metszik egymást, és a 2. ábrából rögtön leolvasható, hogy a sorozatot reprezentáló egyenes szakaszok végpontjai egyre közelebb kerülnek ehhez a metszésponthoz.

Ennek bizonyitására az

$$(1) \qquad \frac{b}{1-a} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b$$

értékét kell nyilván megvizsgálni.

$$(2) \quad \frac{b}{1-a} - \sum_{k=0}^{n-1} a^k b = \frac{1}{1-a}(b-(1-a)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b)\frac{1}{1-a}a^n b,$$

amiből következik, hogy az (1) tetszőlegesen kicsivé válik, ha n elég nagy.

A fenti (2) formulából nemcsak a geometriai sor összegképlete olvasható le, hanem a geometriai sor részletösszegeit adó ismert formula is. Ugyanis (2) alapján

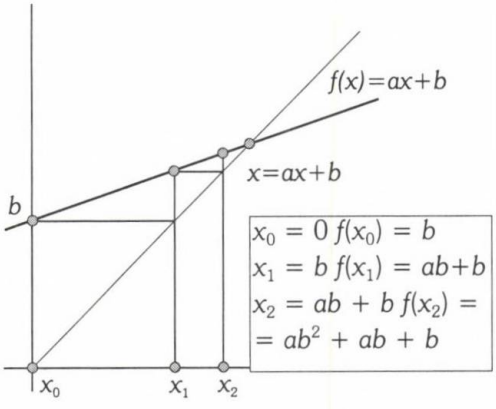
$$\sum_{k=0}^{n-1} a^k b = \frac{b}{1-a} - \frac{a^n b}{1-a}$$

$$\text{és } \frac{b}{1-a} - \frac{a^n b}{1-a} = b\frac{1-a^n}{1-a}.$$

5. rész

Az ismertetett tárgyalásmód semmivel sem egyszerűbb a hagyományosnál. Mégis számos indok van arra, hogy a geometriai sorok hagyományos tárgyalása mellett a fentieket is megmutassuk. Ilyenek például

– univerzális vizuális modellt kaptunk a geometriai sorokra és sorozatokra, és a geometriai so-



2. ábra

rok, ill. sorozatok alapvető tulajdonságai leolvashatók a modellként szolgáló ábrákról;
– a tárgyalás során többször előfordult, hogy egy ábrából leolvasható tulajdonságot a matematika nyelvén megfogalmaztunk. Ez a matematikai modellalkotás egyik formája. A matematikai modellalkotás eléggé elhanyagolt területe a matematikaoktatásunknak;
– az ábrákból leolvasható tulajdonságok bizonyítási módjával és a (2) formula utáni algebrai átalakításokkal újabb példát adtunk arra, hogy milyen többletet kapunk akkor, ha a szemlélet alapján nyert információkat a matematika nyelvén megfogalmazzuk, (ilyen többlet például a geometriai sor n-edik részletösszegét megadó formula is);
– a rekurzív előállítás kapcsolatos a számítógépes programok szerkezetével, hiszen a ciklusképzés a rekurzív előállításnak felel meg.

Ezután érdemes elgondolkodni azon, hogy mi annak az eredménye, ha más folytonos $y = f(x)$ függvénnyel végezzük el az eljárást.

Ringler András

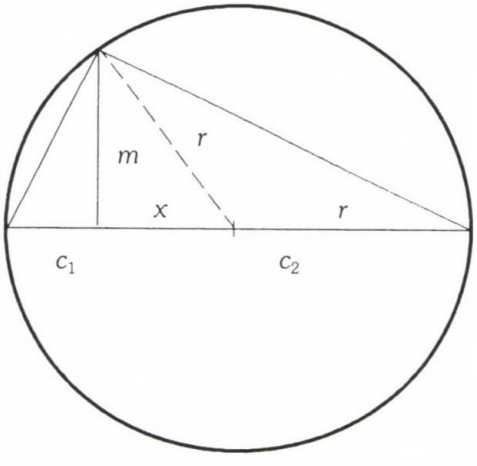
Püthagoraszi üzenet

A Püthagorasz-tétel örök téma. A Püthagorasz-tétel „mindig" aktuális. A Püthagorasz-tételre mindenki odafigyel. Ezt a tételt minden kisiskolás ismeri, és ismerték már a Püthagorasz előtti civilizációkban is. Proklosztól tudjuk, hogy Püthagorasz módszert adott arra, hogy hogyan lehet a később róla elnevezett számhármasokat megtalálni. Erre valószínűleg az

$$\frac{m^2+1}{2} \text{ és a } \frac{m^2-1}{2}$$

oldalhosszúságú négyzetek területének az összehasonlítása során jött rá, olvashatjuk Lévárdi és Sain „Matematikatörténeti feladatok" című könyvében [1]. Miután megismertem az említett könyvből a leírt módszert, elgondolkoztam azon, vajon tényleg így jutott-e el Püthagorasz a számhármasok előállítása módszerének felismeréséhez, vagy elképzelhető-e egy másik, esetleg egy sokkal valószínűbb út is? Hogy mi jutott az eszembe, most közreadom.

Induljunk el a derékszögű háromszögre kimondott magasság-tételből, amelynek felismeréséhez csak a hasonlóság ismeretére volt (és van) szükség. A tétel szerint a derékszögű háromszög átfogójához tartozó m magasság mértani közepe az átfogó c_1 és c_2 részeinek (lásd az *1. ábrát*). Az 1. ábrán látható jelölésekkel gondolkozzunk úgy, ahogy – szerintem – Püthagorasz is gondolkozhatott.



1. ábra.

A körben lévő derékszögű háromszög m magassága mértani közepe az átfogó c1 és c2 részeinek: $m = \sqrt{c_1 \cdot c_2}$.

Az *1. ábra* jelöléseivel teljesülnek a $c_2 = x + r$ és az $r = c_1 + x$ összefüggések, amelyekből $c_2 = 2 \cdot x + c_1$ adódik. Ezután válasszuk meg c_1 és c_2 szakaszok számértékét úgy, hogy teljesüljenek a következő egyenlőségek: $c_1 = 1$ és $c_2 = m^2$. Ezzel a választással a magasság-tétel nyílván teljesül:

$$m = \sqrt{c_1 \cdot c_2} = \sqrt{1 \cdot m^2},$$

de teljesülnek a $c_2 = 2 \cdot x + c_1 = 2 \cdot x + 1 = m^2$ és $r = c_1 + x = 1 + x$ összefüggések is. Ezekből x-re és r-re

$$x = \frac{m^2 - 1}{2} \quad \text{és} \quad r = \frac{m^2 + 1}{2}$$

adódik. Az *1. ábráról* látszik, hogy az m, az x és az r távolságok egy derékszögű háromszög oldalai, vagyis teljesül az $r^2 = m^2 + x^2$ összefüggés, ezért teljesül

$$\left(\frac{m^2 + 1}{2}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{m^2 - 1}{2}\right)^2$$

is. Ha azt akarjuk, hogy ez az egyenlőség egész számokkal is fennálljon, akkor a kifejezésben látható m számot páratlan számnak kell választani (különben a zárójeleken belül nem kapunk egész számokat). A most leírt levezetésnek az az érdekessége, hogy a Proklosz által említett lehetőségtől teljesen eltérő módon kaptuk meg a pitagorászi számhármasok előállításának a szabályát. Nyilvánvaló, hogy a $c_1 = m^2$ és a $c_2 = 1$ helyettesítések esetén is ugyanezt az eredményt kapjuk.

Brahmagupta (598, 660?) hindu matematikus

$$\left(\frac{m^2 + n^2}{2 \cdot n}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{m^2 - n^2}{2 \cdot n}\right)^2 \quad (m > n \neq 0)$$

alakban adta meg a racionális pitagorászi számhármasok képzésének a szabályát [1]. Ez a szabály is könnyedén megkapható az előbb vázolt módszerrel. Ehhez az *1. ábra* jelöléseivel a $c_1 = n$ és a $c_2 = m^2/n$ helyettesítéseket kell elvégezni. Ekkor x-re és r-re

$$x = \frac{m^2 - n^2}{2 \cdot n} \quad \text{és} \quad r = \frac{m^2 + n^2}{2 \cdot n}$$

adódik, amelyekkel teljesül az $r^2 = m^2 + x^2$ összefüggés.

A most leírt módszer igazi érdekessége azonban az, hogy használatával, a $c_1 = 1/n$ és a $c_2 = m^2 \cdot n$ helyettesítésekkel ($n \neq 0$) további képzési szabályhoz juthatunk:

$$\left(\frac{m^2 \cdot n^2 + 1}{2 \cdot n}\right)^2 = m^2 + \left(\frac{m^2 \cdot n^2 - 1}{2 \cdot n}\right)^2.$$

Ebből is, de Brahmagupta szabályából is az $n=1$ helyettesítéssel visszakapjuk az eredeti pithagorászi szabályt. Természetesen fordítva is lehet gondolkozni. Feltehető a kérdés, vajon a pitagorászi szabályból előállítható-e a bemutatott két képzési szabály? A válasz igen, hiszen ha az eredeti pitagorászi szabályban m helyére egy törtet (m/n) írunk, akkor rövid rendezés után előáll a Brahmagupta-féle szabály; és ha m helyére egy szorzatot $(m \cdot n)$ írunk, akkor az általam bemutatott képzési szabályhoz jutunk.

Igen-igen valószínű, hogy a dolgozatomban leírt lehetőséget már nagyon sok „püthagóreus" végiggondolta már. A módszert azonban én csak most találtam meg, ezért felismerésemet, Püthagorász mester ezen nekem „küldött üzenetét" másokkal is megosztom. Teszem ezt azért, hogy a pitagorászi számhármasok megtalálására, a Proklosz által Püthagorásznak tulajdonított, a figurális elrendezésekből adódó, egyébként nagyon is szellemes módszer ne tűnjék annyira heurisztikusnak, mint ahogy az nekem először tűnt.

Irodalom

[1] Lévárdi L. és Sain M.: Matematikatörténeti feladatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1982.

Dr. Kántor Sándorné

A Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Versenyekről

A 2001/2002. tanévben 2001. november 15-én került megrendezésre a Hajdú-Bihar megyei Középiskolai Matematikai Verseny a DE Matematikai és Informatikai Intézete és a BJMT H-B megyei Tagozatának szervezésében. A verseny koordinátora dr. Lajkó Károly, a versenybizottság vezetője dr. Kántor Sándorné volt.

A versenyen kb. 1200 tanuló vett részt a megye középiskoláiból.

Az egyes évfolyamok versenyfeladatait a DE Matematikai és Informatikai Intézetének oktatói állították össze (9. évfolyam: dr. Kovács András, 10. évfolyam: dr. Kántor Sándor, 11. évfolyam: dr. Páles Zsolt, 12. évfolyam: dr. Kántor Sándorné). Mindegyik évfolyamon a tanulóknak 5 feladatból álló feladatsort kellett kidolgoznia, a kidolgozási idő 3 óra volt. Egy-egy feladatsor értéke: 60 pont.

A versenybizottság eredményesnek ítélte a versenyt. A 11. évfolyam feladatsora nehezebbnek bizonyult.

Maximális pontszámot két tanuló ért el: Egri Attila (10. évfolyam) és Siroki László (12. évfolyam). Összeségében 35 tanár 65 diákja ért el helyezést, vagy kapott dicséretet.

A verseny eredményei

(A rövidítések jelentései: FMG: Fazekas Gimnázium, Debrecen, TÁG: Tóth Árpád Gimnázium, Ady: Ady Endre Gimnázium, Dóczy: Dóczy Gedeon Református Gimnázium, DE Kossuth: Debreceni Egyetem Kossuth Gyakorló Gimnáziuma, Hőgyes: Hőgyes Endre Gimnázium, Hajdúszoboszló, KF, Püspökladány: Karacs Ferenc Gimnázium, Püspökladány, VP, Polgár: Vásárhelyi Pál Gimnázium, Polgár, Baross G. . Baross Gábor Szakközépiskola, Debrecen, Bethlen: Bethlen Gábor Szakközépiskola, Debrecen, Mechwart: Mechwart András Szakközépiskola, Debrecen, Gábor D.: Gábor Dénes Szakközépiskola, Debrecen).

9. osztály

Gimnáziumok:

I. díj: **Fábi László Zsolt** (Dóczy)
Ruskó Péter (FMG)

II. díj: **Sóvágó Sándor** (H.böszörmény, Bocskai), **Isza Péter** (TÁG)

III. díj: **Láda Erika** (H.böszörmény, Bocskai), **Tatár Anita** (FMG)

Dicséret:
Konyári István (Ady).
Jeremiás Noémi (Ady)
Tóth Gabriella (H.böszörmény, Bocskai)
Hovánszki Tamás (H.böszörmény, Bocskai)
Aradi Bernadett (DE Kossuth)
Borbély Mátyás (TÁG)
Nagy Máté (Dóczy)
Szikszag Zsolt (Ady)
Kovács Árpád (TÁG)
Varga Zoltán (H.böszörmény, Bocskai)

Szakközépiskolák:

I. díj: **Tóth Tímea** (Bethlen)

II. díj: **Madar Zoltán** (Mechwart)

Dicséret:

Budai Tamás (Gábor D.)
Kecskés József (Mechvart)
Rácz Dávid (Gábor D.)
Kocsis Norbert (Baross G.)

10. osztály

Gimnáziumok:

I. díj: **Egri Attila** (H.szoboszló, Hőgyes)

II. díj: **Sum Zsuzsa** (DE Kossuth)
Papp Gábor (FMG)
Dányádi Zsolt (FMG)

III. díj: **Tuska Gábor** (FMG)
Szabó Áron (FMG)
Szőke Edina (FMG)

Dicséret:
Biri Bernadett (FMG)
Makó Imre (FMG)
Zajló Szabolcs (TÁG)
Vadon Gyöngyi (TÁG)

Szakközépiskolák:

II. díj: **Bényei Antal** (Gábor Dénes)

Dicséret:
Jónis Péter (Mechwart)

11. osztály

Gimnáziumok:

I. díj: **Csóka Endre** (FMG)

II. díj: **Kormos Attila** (FMG)

III. díj: **Nagy András** (FMG)
Nagy Tibor (FMG)

Dicséret:
Krusper Balázs (TÁG)
Tóth Erzsébet (TÁG)

Szakközépiskolák:

II. díj: **Dobos András** (H.szob. Közg.)

12. osztály

Gimnáziumok:

I. díj: **Siroki László** (FMG)
Makó Judit (Polgár, V.P.)

II. díj: **Föllesi Tamás** (FMG)
Tóth Ágnes (H.szob., Hőgyes)

III. díj: **Erdei Zsuzsa** (H.szob., Hőgyes)
Tímár Gábor (FMG)
Dombi Tímea (TAG)

Dicséret:
Veréb Tamás (TÁG)
Guta Balázs (Ady)
Kovács Dénes (TÁG)
Pajna Gabriella (TÁG)
Vadai Zsolt (FMG)
Csillag Marianna (K.F.)
Katrus Ágota (Svetits)

Szakközépiskolák:

I. díj: **Varga Balázs** (Bethlen)

II. díj: **Szaszkó Viktor** (Bethlen)

Dicséret:
Szűcs Róbert
Juhász Tibor
Hajdír János (Mechwart)
Mile Tamás
Mácsi Zoltán
Agócs László

A versenyen kitűzött feladatok

9. évfolyam

1. Diophantosz, ókori görög matematikus sírkövére állítólag a következő verset vésték.

Vén Diophantoszt rejti e kő. Bár ő maga szunnyad,
Megtanította a sírt: mondja el élte sorát.
Évei egyhatodát tölté ki a gyönge gyerekkor,
Még feleannyi lefolyt; s álla szakálla kinőtt.
Egyheted eltelt még; és nászágy várta a férfit,
Elmúlt újra öt év, és fia megszületett.
Ez feleannyi napig láthatta a fényt idefent, mint
Atyja, mivel neki így szabta az isteni sors.
Őt gyászolva a sír fele hajlott agg Diophantosz:
Négy évvel később ő is elérte a célt.
Mondd; hány esztendőt élt hát meg gyászban, örömben;
S itta az édes fényt; míg hona lett ez a sír?

Válaszoljunk a versben feltett rejtvényre, azaz számítsuk ki milyen kort ért meg Diophantosz.

8 pont

2. Szerencsétlen Flótásnak a 9. a legbalszerencsésebb tanulójának szétszakadt a kulcstartója, és a rá sorrendbe felfűzött 6 egyforma kulcsa szétszóródott a táskájában. Legrosszabb esetben hány kísérlet szükséges ahhoz, hogy az iskola után hazaérve kinyissa a kertkaput, a társasház külső kapuját, a belső ajtót, a lakásajtó előtti rácsot, valamint a lakásajtó két különböző zárját?

10 pont

3. Egy 33 tagú osztály tanulói közül mindennap 22-en úsznak és 22-en fociznak. Mindenki mindennap legalább az egyik edzésen részt vesz. Azok közül, akik ma fociznak, tegnap 15-en úsztak és 15-en fociztak, és ugyanez a helyzet azoknál is, akik ma úsznak. Hány olyan diák van, aki mindkét nap csak úszott?

12 pont

4. András egy konvex sokszög belső szögeit adja össze számológéppel, amikor hirtelen felkiált. „Még egy szög van hátra, de a kijelzőn szereplő összeg éppen 2001." Hány fokos lehet a kimaradt szög?

12 pont

5. El lehet-e érni, hogy az $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ összeg értéke 2001 legyen?

16 pont

10. évfolyam

1. Legyen egy egyenlőszárú háromszög alapjának hossza a, szárának hossza b és kerületének hossza k. Bizonyítsa be, hogy

$$\frac{1}{2}k < a+b < \frac{3}{4}k.$$

8 pont

2. Egy szabályos ABC háromszög AB oldalát B-n túl meghosszabbítjuk a $BP = 2AB$ szakasszal, az AC oldalát pedig C-n túl a $CQ = AC$ szakasszal. Bizonyítsa be, hogy $PQ = PC$.

12 pont

3. Hány pozitív egész számokból álló $(x; y)$ számpár elégíti ki az

$$x^3 - y^3 = 2001$$

egyenletet?

12 pont

4. Bizonyítsa be, hogy ha egy páratlan oldalszámú konvex sokszög körbe írható és szögei egyenlők, akkor szabályos!

14 pont

5. Az a, b, c, d, e olyan pozitív egész számok, amelyekre

$$a^4 + b^4 + c^4 + d^4 = e^4$$

teljesül. Bizonyítsa be, hogy közülük legalább három páros!

14 pont

11. évfolyam

1. A p paraméter milyen értékei mellett osztható a $P_4(x) = x^4 + px^2 - 12$ polinom a $P_1(x) = x - 2$ polinommal?

8 pont

2. Egy zsákban egybevágó háromszögek vannak, melyeknek oldalait ötféle színnel színezték ki úgy, hogy bármely két háromszög különböző módon van kiszínezve (két színezési mód akkor egyező, ha bármely szín ugyanannyi számú oldalnál szerepel). Legfeljebb hány háromszög lehet a zsákban?

10 pont

3. Oldjuk meg a valós számok halmazán az

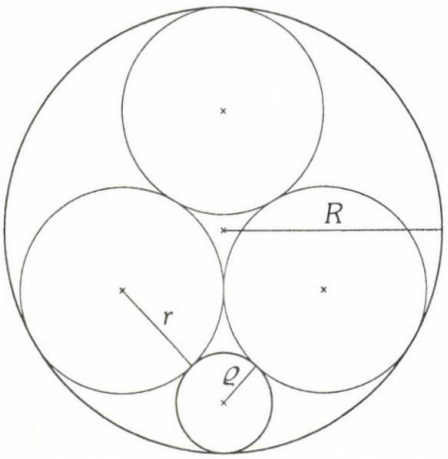
$$\frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+2)(x+3)} + \cdots + \frac{1}{(x+2000)(x+2001)} = \frac{1000}{2001 \cdot 2002}.$$

12. pont

4. Három egymást páronként kívülről érintő r sugarú kör köré egy R sugarú kört írunk, illetve egy olyan ϱ sugarú kört szerkesztünk, amely két

r sugarú kört kívülről, az R sugarú kört pedig belülről érinti, az ábrán látható módon. Mekkora R és ϱ?

14 pont



5. Igazoljuk, hogy

$$3 \cdot 2^{-\sin^2 x} + 8^{-\cos^2 x} \geq \sqrt[4]{32}.$$

Mikor állhat fenn egyenlőség?

16 pont

12. évfolyam

1. Oldjuk meg az

$$|\mathrm{tg}x + \mathrm{ctg}x| = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

egyenletet.

9 pont

2. Bizonyítsuk be, hogy ha a_1, a_2, a_3, ... , a_n ($a_i \neq 0$) egy számtani sorozat tagjai, akkor

$$\frac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \frac{1}{\sqrt{a_2}+\sqrt{a_3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{a_{n-1}}+\sqrt{a_n}} = \frac{n-1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_n}}.$$

10 pont

3. Határozzuk meg azokat az x egész számokat, amelyekre a

$$(-6x^2 + 12x - 2)^{x^2-2x+2} = 4$$

összefüggés teljesül.

12 pont

4. Az $ABCS$ egyenes tetraéder (oldallapjai egyenlő szárú háromszögek) ABC alaplapja a oldalhosszúságú szabályos háromszög és az S csúcsba összefutó élek páronként merőlegesek egymásra. Adjuk meg a tetraéder köré írható gömb R sugarát az alaplap oldalhosszúságának a függvényeként.

14 pont

5. Az $x^3 - 12x + m^2 - 2m + 12 = 0$ harmadfokú egyenletnek három valós gyöke van ($m \in \mathbb{R}$). Ha x_1, x_2, x_3 a három gyök, akkor mennyi lesz az $x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$ maximális értéke?

15 pont

Néhány feladat megoldásának a bemutatása

9. évfolyam

4. Az n oldalú konvex sokszög az egy csúcsából húzható átlókkal $n-2$ darab háromszögre bontható. Az $n-2$ háromszög, azaz az n oldalú konvex sokszög belső szögeinek összege $(n-2) \cdot 180°$.

A kimaradt szög mértéke legyen α fokokban. A belső szögekre így felírható a $2001° + \alpha = (n-2) \cdot 180°$ egyenlőség.

Miután konvex szögekről van szó, α-ra $0° < \alpha < 180°$ teljesül.

A jobb oldal osztható 180°-kal, tehát a bal oldalnak is oszthatónak kell vele lennie.

$2001° + \alpha = 11 \cdot 180° + 21° + \alpha$ miatt $21° + \alpha = 180°$.

Ebből $\alpha = 159°$.

5. Keressük meg az összegben szereplő törtek legkisebb közös nevezőjét, és hozzuk a törteket erre a közös nevezőre!

Legyen k a legnagyobb olyan természetes szám, amelyre $2^k < n$. A közös nevezőre hozáskor $\frac{1}{2^k}$ kivételével mindegyik tört számlálója páros lesz; $\frac{1}{2^k}$ számlálója páratlan.

Ezért, ha a törteket összeadjuk, a végeredményül kapott tört számlálója páratlan, nevezője páros.

Így a tört értéke nem egész szám.

Nem lehet tehát az összeg értéke 2001 sem.

10. évfolyam

2. Ha az AC oldalt C-n túl a $CR = 2AC$ szakasszal hosszabbítjuk meg, akkor az így nyert APR háromszög szabályos.

$APC\Delta = RPQ\Delta$, mert $AP = RP$, $AC = RQ$ és $CAP\sphericalangle = QRP\sphericalangle$. Tehát a harmadik oldalak egyenlők.

3. Az egyenlőséget kielégítő x és y nem adhatja hárommal osztva ugyanazt a maradékot, mert akkor $x^3 - y^3$ osztható lenne 9-cel, 2001 pedig nem osztható vele.

Nem teljesülhet az sem, hogy hárommal osztva különbözőek a maradékok, mert akkor $x^3 - y^3$ nem osztható hárommal, 2001 pedig osztható hárommal.

Tehát nincs az egyenletet kielégítő, pozitív egész számokból álló $(x; y)$ számpárt.

11. évfolyam

1. 1. megoldás.

Polinom osztással kapjuk, hogy

$$P_4(x) : P_1(x) = x^3 + 2x^2 + \\ + (p+4)x + 2(p+4) + \frac{4p+4}{x-2}.$$

Ez adja, hogy $P_4(x)$ akkor és csak akkor osztható $P_1(x)$-szel, ha $4p + 4 = 0$, azaz $p = -1$.

2. megoldás.

$p = 0$ esetén $P_4(x) = x^4 - 12 = (x - 2)(x + 2)(x^2 + 4) + 4$, így $P_4(x)$ nem osztható $(x - 2)$-vel, mert $x - 2 \nmid 4$.

Ha $p \neq 0$, úgy

$$P_4(x) = x^4 + px^2 - 12 = x^4 - 16 + px^2 + 4 = \\ = (x-2)(x+2)(x^2+4) + p\left(x^2 + \frac{4}{p}\right)$$

miatt $P_4(x)$ akkor és csak akkor osztható $P_1(x)$-szel, ha $x^2 + \frac{4}{p}$ osztható $P_1(x)$-szel, azaz, ha $\frac{4}{p} = -4$, vagyis $p = -1$.

3. megoldás.

$P_4(x)$ akkor és csak akkor osztható $P_1(x)$-szel, ha léteznek a, b, c valós számok, hogy $x^4 + px^2 - 12 = (x - 2)(x^3 + ax^2 + bx + c)$, azaz

$$x^4 + px^2 - 12 = \\ = x^4 + (a-2)x^3 + (b-2a)x^2 + (c-2b)x - 2c.$$

Ebből (az együtthatók összehasonlításával) következik, hogy $a = 2$, $c = 6$, $b = 3$, illetve $p = b - 2a = -1$.

3. Az r sugarú körök középpontjai egy $2r$ oldalú szabályos háromszöget alkotnak, mely körülírt körének középpontja megegyezik az R sugarú kör középpontjával, sugara pedig

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} 2r = \frac{2\sqrt{3}}{3} r,$$

így

$$R = r + \frac{2\sqrt{3}}{3} r = \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) r.$$

Az ábra jelölései mellett egyrészt

$$m = R - \varrho - d = \left(1 + \frac{2\sqrt{3}}{3}\right) r - \varrho - \frac{r\sqrt{3}}{3} = \\ = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r - \varrho,$$

azaz

$$m^2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 r^2 - 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r\varrho + \varrho^2.$$

Másrészt $(r + \varrho)^2 = r^2 + m^2$, azaz $m^2 = \varrho^2 + 2\varrho r$. Így

$$2\varrho r = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 r^2 - 2\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) r\varrho,$$

azaz

$$\left(4+\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)\varrho=\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 r,$$

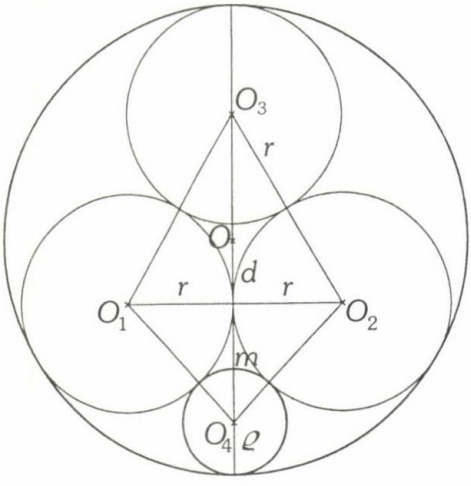
vagyis

$$\varrho=\frac{\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2}{4+\frac{2\sqrt{3}}{3}}r=\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{2\sqrt{3}}{3}}{2\frac{6+\sqrt{3}}{3}}r=\frac{2+\sqrt{3}}{6+\sqrt{3}}r=$$

$$=\frac{(2+\sqrt{3})(6-\sqrt{3})}{33}r=\frac{9+4\sqrt{3}}{33}r.$$

Tehát

$$\varrho=\frac{9+4\sqrt{3}}{33}r.$$



5. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség felhasználásával

$$3\cdot 2^{-\sin^2 x}+8^{-\cos^2 x}=$$

$$=2^{-\sin^2 x}+2^{-\sin^2 x}+2^{-\sin^2 x}+2^{-3\cos^2 x}\geq$$

$$\geq 4\sqrt[4]{(2^{-\sin^2 x})^3\cdot 2^{-3\cos^2 x}}=4\sqrt[4]{2^{-3(\sin^2 x+\cos^2 x)}}=$$

$$=\sqrt[4]{\frac{4^4}{2^3}}=\sqrt[4]{32}$$

Egyenlőség akkor áll fenn, ha $2^{-\sin^2 x}=8^{-\cos^2 x}$, azaz $-\sin^2 x=-3\cos^2 x$, illetve $\operatorname{tg}^2 x=3$ és így

$$\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3},\ \text{tehát}\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k\pi(k\in\mathbb{Z}).$$

12. évfolyam

1. Nyilvánvaló, hogy

$$x\neq k\cdot\frac{\pi}{2}(k\in\mathbb{Z}).$$

$$\left|\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}\right|=\left|\frac{2}{\sin 2x}\right|=\frac{4}{\sqrt{3}}$$

1. eset. Ha $\sin 2x>0$, akkor

$$\frac{2}{\sin 2x}=\frac{4}{\sqrt{3}}\qquad \sin 2x=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

amiből

$$2x_1=\frac{\pi}{3}+2k_1\pi,\quad x_1=\frac{\pi}{6}+k_1\pi\ \ (k_1\in\mathbb{Z})$$

$$2x_2=\frac{2\pi}{3}+2k_2\pi,\quad x_2=\frac{\pi}{3}+k_2\pi\ \ (k_1\in\mathbb{Z})$$

2. eset. Ha $\sin 2x<0$, akkor

$$\frac{2}{\sin 2x}=-\frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\sin 2x=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

amiből

$$2x_3=\frac{4\pi}{3}+2k_3\pi,\quad x_3=\frac{2\pi}{6}+k_3\pi\ \ (k_3\in\mathbb{Z})$$

$$2x_4=\frac{5\pi}{3}+2k_4\pi,\quad x_4=\frac{5\pi}{3}+k_4\pi\ \ (k_4\in\mathbb{Z}).$$

Mind a négy gyök kielégíti az eredeti egyenletet.

3. $-6x^2+12x-2\in\mathbb{Z}$ és $x^2-2x+2\in\mathbb{Z}$.

$4=4^1=2^2=(-2)^2$ előállítások lehetségesek.

I. *a)* $-6x^2+12x-2=4$

$-6x^2+12x-6=-6(x-1)^2=0,\ x=1;$

b) $x^2-2x+2=(x-1)^2+1=1;\ x=1.$

Tehát $x=1$ megoldás.

II. *a)* $-6x^2+12x-2=2$

$$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{12}}{6}\notin\mathbb{Z};$$

b) $x^2-2x+2=1$

$x=1$

Ez az eset nem ad megoldást.

III. *a)* $-6x^2 + 12x - 2 = -2$, gyökei $x_1 = 0$, $x_2 = 2$;

b) $x^2 - 2x + 2 = 2$, gyökei $x_1 = 0$, $x_2 = 2$.

$x_1 = 0$, $x_2 = 2$ tehát megoldások.

Összefoglalva: $I = \{0, 1, 2\}$.

5. A Viéte formulák, vagy a gyöktényezős alak alapján:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$
$$x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3 = -12$$
$$x_1x_2x_3 = -m^2 + 2m - 12 .$$

Felhasználva, hogy

$$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3(a + b + c)(ab + ac + bc) - 3abc,$$
$$x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 3(-m^2 + 2m - 12) = 3(-(m - 1)^2 - 11),$$

ami nyilvánvalóan $m = 1$ esetén maximális és értéke -33.

Dr. Urbán János

Beszámoló a XI. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyről

A XI. Nemzetközi Magyar Matematikaversenyt 2002. március 17 – 20-ig, Erdélyben, Székelyföldön, **Sepsiszentgyörgyön** a Székely Mikó Kollégium rendezte meg. A házigazdák **Bíró Judit** főszervező és **Bíró Béla,** a Székely Mikó Kollégium igazgatója vezetésével meleg vendégszeretettel gondoskodtak arról, hogy a közel 300 vendég – versenyző diák és kísérő tanár jól érezze magát a négy nap alatt.

A március 17-i ünnepi megnyitó kedves műsora után városnézés következett, majd délután szakmai előadásokat hallgathattak meg a résztvevők. Az előadások közül különösen érdekes volt **Dr. Kiss Elemér** egyetemi tanár Bolyai Jánosról szóló előadása.

A 4 órás verseny március 18-án délelőtt folyt le, délután a versenybizottság javította a dolgozatokat. A versenybizottság munkáját elnökként **dr. Bege Antal** egyetemi adjunktus (Babes Bolyai Tudományegyetem, Kolozsvár) irányította.

Aznap este a diákok és azok a kísérő tanárok, akik végeztek a dolgozatjavítással, a sepsiszentgyörgyi Tamási Áron Színház előadásában Madách Imre Az ember tragédiája című művét nézhették meg, érdekes felfogásban, kevés, de ötletes díszlettel.

Hétfőn, március 19-én egésznapos kiránduláson ismerkedhettünk meg Háromszék és környékének gyönyörű tájaival, és történelmi emlékeivel. Annak a látványnak is örülhettünk, amit a szép napsütésben a havasok hófödte csúcsai nyújtottak.

Az ünnepélyes eredményhirdetésre a Tamási Áron Színházban került sor március 20-án.

Az egyes osztályok versenyében a díjazottak a következők:

9. osztály

I. díjasok: nem adtak ki díjat.

II. díjasok:

Széles Ádám, Csíkszereda, Márton Á. G.
Bodnár József, Fülek, Gimnázium

III. díjasok:

Czank Tamás, Miskolc, Földes F. G.
Kiss Gábor, Budapest, Berzsenyi D. G.
Stippinger Marcell, Sopron, Széchenyi G.
Zajicek Péter, Révkomárom, Selye J. G.
Seres Gyula, Budapest, Fazekas M. G.
Mátyás Péter, Révkomárom, Selye J. G.
Németh Bertalan, Kecskemét, Bányai G.
Eckert Bernadett, Bonyhád, Petőfi Ev. G.

10. osztály

1. díjasok:
Pach Péter Pál, Budapest, Fazekas M. G.
II. díjasok:
Kórus Péter, Szeged, Radnóti M. G.
III. díjasok:
Nedeczky Gábor, Kaposvár, Táncsics M. G.
Fehér Gábor, Budapest, Berzsenyi D. G.
Egri Attila, Hajdúszoboszló, Hőgyes E. G.
Dányádi Zsolt, Debrecen, Fazekas M. G.

11. osztály

I. díjasok:
Csóka Endre, Debrecen, Fazekas M. G.
Pelládi Gábor, Miskolc, Földes F. G.
Ruppert László, Pécs, Janus P. G.
II. díjasok:
Bartha Ferenc, Szeged, Radnóti M. G.
Rendes Gábor, Győr, Révai G.
III: díjasok:
Koltai Péter, Révkomárom, Selye J. G.
Bergmann Gábor, Budapest, Berzsenyi D. G.
Nagy Gábor, Kaposvár, Táncsics M. G.
Rácz Éva, Budapest, Fazekas M. G.
Borbély Árpád, Nyíregyháza, Zrínyi I. G.

12. osztály

I. díjasok:
Koreck Ferenc, Szeged, Radnóti M. G.
Pallos Péter, Budapest, Fazekas M. G.
Jesch Dávid, Nagykanizsa, Batthyány L. G.
Tóth Ágnes, Hajdúszoboszló, Hőgyes E. G.
Balogh János, Kaposvár, Táncsics M. G.
II. díjasok:
Dömötör Csilla, Győr, Révai G.
III. díjasok:
Siroki László, Debrecen, Fazekas M. G.
Boros Vazul, Budapest, Berzsenyi D. G.
Kevei Péter, Szeged, Radnóti M. G.
Spanczér Ilona, Nagykanizsa, Batthyány L. G.

A versenyen a következő feladatokat kellett megoldani a versenyzőknek:

9. osztály

1. Határozzuk meg a 2001^{2002} szám tízes számrendszerbeli alakjának utolsó hat számjegyét.

Kacsó Ferenc, Marosvásárhely

2. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AC és BC befogóján úgy vesszük fel a D és E pontokat, hogy DE párhuzamos AB-vel és $DE + EA = AB$.

Határozzuk meg az EAB szög nagyságát.

Katz Sándor, Bonyhád

3. Az ábrán látható táblázatban az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyeket úgy írtuk be, hogy mindegyiket pontosan egyszer használtuk fel. továbbá az $\overline{abc}, \overline{adg}, \overline{beh}, \overline{cfi}, \overline{def}, \overline{ghi}, \overline{aei}$ számok mindegyike osztható 11-gyel. Mekkora a $\overline{ceg}$ szám legnagyobb értéke?

a	b	c
d	e	f
g	h	i

Kiss Sándor, Nyíregyháza

4. Az ABC, C-ben derékszögű háromszögben $BC = p$, ahol p prímszám, az AC befogó hosszának számértéke a $k \cdot p$ ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$), továbbá egész szám annak a négyzetnek az oldalhossza is, amelynek egyik csúcsa a C pont, a többi csúcsa az ABC háromszög oldalain van. Bizonyítsuk be, hogy a négyzet területe k^2-tel egyenlő!

Bíró Bálint, Eger

5. Az ABC egyenlő szárú háromszög ($AB = AC$) síkjában adottak az M és N pontok úgy, hogy a BN és CM szakaszok a háromszög belsejében metszik egymást. $NBC\sphericalangle = MCA\sphericalangle$ és az MBN, valamint NCM szögek derékszögek. Igazoljuk, hogy az M, N és A pontok egy egyenesen vannak!

András Szilárd, Lukács Andor, Kolozsvár

6. Mutassuk ki, hogy bárhogyan is választunk 17 darab természetes számot az {1, 2 ..., 2002} halmazból, létezik ezek között három különböző

szám, amelyekkel mint oldalhosszakkal egy háromszög szerkeszthető. Igaz marad-e az állítás 16 szám esetén?

Jakab Tibor, Sepsiszentgyörgy

10. osztály

1. Egy körön adott 2002 pont, amelyek közül egyet megjelölünk A-val. Az adott pontokkal, mint csúcspontokkal megszerkesztjük az összes konvex sokszöget (háromszögeket, négyszögeket, ...).

a) Melyik sokszögből van több, azokból, amelyeknek az egyik csúcspontja az A, vagy azokból, amelyeknek egyik csúcspontja sem esik egybe az A ponttal?

b) Legyen P annak a valószínűsége, hogy az összes konvex sokszög közül találomra kiválasztva egyet, annak az egyik csúcspontja az A. Bizonyítsuk be, hogy

$$\left|P-\frac{1}{2}\right|<\frac{1}{2^{1981}}.$$

Szabó Magda, Szabadka

2. Határozzuk meg az a paraméter azon értékeit, amelyekre

$$\sqrt{1+x^4}>1-2ax+x^2$$

egyenlőtlenség minden pozitív x-re teljesül.

Bogdán Zoltán, Cegléd

3. Bizonyítsuk be, hogy minden ABC háromszögben érvényes a következő egyenlőtlenség:

$$4T\,(\operatorname{ctg}A+\operatorname{ctg}B+\operatorname{ctg}C)\geq ab+bc+ac,$$

ahol a, b, c a háromszög oldalainak hosszát, A, B, C a háromszög szögeinek nagyságát és T a háromszög területét jelenti.

Oláh György, Komárom

4. Adott az $n\geq 2$ páratlan természetes szám. Határozzuk meg az

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\frac{1}{\sqrt{5}+\sqrt{6}}+\ldots$$
$$\ldots\frac{1}{\sqrt{n^2-2}+\sqrt{n^2-1}}$$

szám egész részét.

Balázsi Borbála, Beregszász

5. Az ABC háromszögben az AM, BN és CP összefutó (egy ponton átmenő) egyenesek (M a BC, N a CA és P az AB oldalon található). Legyen az AM és NP metszéspontja Q. Bizonyítsuk be, hogy, ha a $BQM\sphericalangle$ és $MQC\sphericalangle$ szögek egyenlők, akkor AM merőleges NP-re.

András Szilárd, Kolozsvár

6. Egy négyzet alakú 100-szor 100-as táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írunk. Tudjuk, hogy bármely két szomszédos (közös oldallal rendelkező) mezőbe írt szám különbsége legfeljebb 10. Bizonyítsuk be, hogy van 6 olyan mező a táblázatban, amelyekbe azonos számokat írtunk.

Urbán János, Budapest

11. osztály

1. Az

$$\frac{1}{2002},\frac{2}{2001},\frac{3}{2000},\ldots\frac{2000}{3},\frac{2001}{2},\frac{2002}{1}$$

számok közül kiválasztható-e három úgy, hogy a kiválasztott három szám szorzata 1 legyen?

Katz Sándor, Bonyhád

2. Adott az $a>1$ valós szám és az $f:(1,\infty)\to\mathbb{N}$ függvény, úgy, hogy

$$a^{f(x)}\leq x<a^{f(x)+1},\qquad \forall x>1.$$

Igazoljuk, hogy

$$f(xyz)\geq f(x)+f(y)+f(z),\qquad \forall x,y,z>1.$$

Bencze Mihály, Brassó

3. Bizonyítsuk be, hogy minden tetraédernek van olyan csúcsa, amelyből induló három éléből háromszög szerkeszthető.

Kántor Sándor, Debrecen

4. Határozzuk meg az összes olyan $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ szürjektív (amely minden természetes számot felvesz) függvényt, amelyre

$$f(10^{f(n)}+m)=f(10^n)+f(m).\qquad \forall m,n\in\mathbb{N}.$$

Bíró Béla, Sepsiszentgyörgy

5. *a)* Oldjuk meg a valós számok halmazán a

$$2^{nx} + (n-1)\cdot 2 = \frac{2}{x}$$

egyenletet, ha $n \in \mathbb{N}^*$ rögzített természetes szám.

b) Határozzuk meg annak az $(x_n)_{n>1}$ sorozatnak az általános tagját, amelynek a tagjai teljesítik

$$2^{x_1} + 2^{2x_2} + 2^{3x_3} + \cdots + 2^{nx_n} = \frac{2}{x_n}$$

egyenlőséget bármely $n \in \mathbb{N}^*$ esetén.

Longáver Lajos, Nagybánya

6. Egy lépés során az (a, b) természetes számpárt az $(a + 2b, b + 2a)$ számpárral helyettesítjük.

a) Határozzuk meg azokat a természetes számpárokat, amelyekből bizonyos számú lépés után a (2002, 2003) számpárt kapjuk.

b) Adott a $p > 3$ prímszám. Bizonyítsuk be, hogy létezik egy olyan kezdeti (a, b) számpár, amelyre vagy az a vagy a b szám osztható p-vel és legalább $\frac{p+1}{2}$ lépés elvégzése után egy olyan számpárt kapunk, amelyben a két szám összege $2 \cdot 3^p$.

Bege Antal, Kolozsvár

12. osztály

1. Tudjuk, hogy 1000 darab természetes szám reciprokának összege nagyobb mint 10. Bizonyítsuk be, hogy van közöttük legalább két egyenlő szám.

Szabó Magda, Szabadka

2. Az XOY derékszögű koordináta rendszerben adottak az $A(0, 51)$ és $B(78, 51)$ pontok. Létezik-e az OX tengelyen olyan M pont, melyre az MAB háromszög belsejében elhelyezkedő rácspontok száma pontosan 2002? (A rácspontok azon pontok melyek koordinátái egész számnok.)

Kacsó Ferenc. Marosvásárhely

3. Igazoljuk, hogy a $b_1, b_2, \ldots, b_m$ pozitív valós számok akkor és csakis akkor alkotnak mértani haladványt (mértani sorozatot), ha

$$\sum_{k=1}^{n} b_k^2 b_{n-k+1}^2 = n b_1^2 b_n^2, \quad n \in \{1,2,\ldots,m\}.$$

Bencze Mihály, Brassó

4. Oldjuk meg a pozitív egész számok halmazán a következő egyenletet

$$\left[\frac{x_1^2}{x_2+x_3}\right] + \left[\frac{x_2^2}{x_3+x_4}\right] + \cdots \left[\frac{x_n^2}{x_1+x_2}\right] = \left[\frac{n-1}{x_1+x_2+\cdots x_n}\right],$$

ahol $a \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 3$ és $[x]$ az x szám egész részét jelöli.

Bencze Mihály, Brassó

5. Adottak az $x_1, x_2, \ldots, x_{11}$ egész számok. Az $a_1, a_2, \ldots, a_{11}$ számok a $\{-1, 0, 1\}$ halmazbeli értékeket vehetik fel, de úgy, hogy nem mind egyenlők 0-val.

Igaz-e, hogy van olyan értéke az

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_{11}x_{11}$$

kifejezésnek, amely 2002-vel osztható?

Róka Sándor, Nyíregyháza

6. Egy táblára felírtuk az egész számokat – 6-tól 6-ig (13 számot). Egy lépésben két kiválasztott szám, a és b helyett felírhatjuk az

$$A = \frac{5a-12b}{13} \text{ és } B = \frac{12a+5b}{13}$$

számokat. Elérhetjük-e azt, hogy bizonyos számú lépés után 13 egyforma szám álljon a táblán?

Katz Sándor, Bonyhád

A XXXI. Országos Kalmár László Verseny megyei fordulójának feladatai és megoldásai (5-8. osztály)

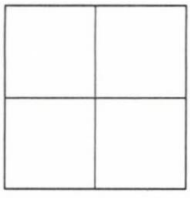
Ötödik osztály

1. Melyik az a legnagyobb pozitív egész szám, amelyben (balról jobbra haladva) a harmadik számjegytől kezdve minden számjegy az őt megelőző két számjegy összege?

2. Két kétjegyű tízes számrendszerbeli szám szorzata egy négyjegyű szám: $AA \cdot BC = ADDA$ (azonos betűk azonos, különböző betűk különböző számjegyeket jelölnek, és A páros számjegy). Keresd meg az összes megoldást!

3. Van 500 darab egyforma (egybevágó) egység élű kis kockánk. Egy olyan nagy kockát akarunk építeni ezek egy részéből, amelyre teljesül, hogy ahány kis kockát felhasználtunk az építéshez, ugyanannyi kis kocka lap a nagy kocka felülete (felszíne). Lehetséges ez? Hány kis kockát kell felhasználni az építéshez?

4. Egy 2 egység oldalú négyzetet felbontottunk négy egybevágó (egyforma) kis négyzetre az ábrán látható módon.



Ezen egy nagy, 4 kis négyzet látható, és 2 „fekvő", 2 „álló" 2×1-es téglalap. Így összesen 9 téglalap látható az ábrán (a négyzet is téglalap).

Hány téglalap látható (esetleg más méretű is) akkor, ha egy 4 egység oldalú négyzetet bontunk fel 16 egybevágó kis négyzetre?

Az 5. osztály feladatainak megoldása

1. Arra kell törekedni, hogy minél több jegyű számot írjunk fel, de az első két jegye a lehető legkisebb legyen. Az első két jegy ezért legyen 1 és 0. Ezután a következő számot kapjuk: 10112358.

2. Összesen 7 megoldást kapunk

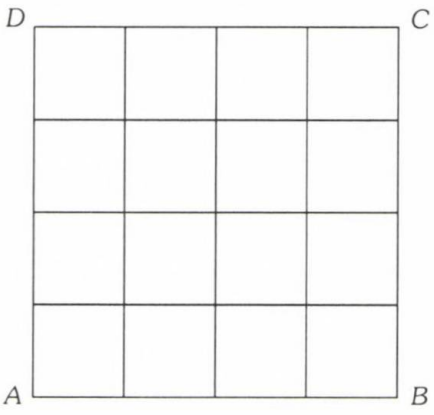
$22 \cdot 91 = 2002$, $66 \cdot 91 = 6006$,
$22 \cdot 96 = 2112$,
$44 \cdot 91 = 4004$, $88 \cdot 91 = 8008$,
$44 \cdot 96 = 4224$, $88 \cdot 96 = 8448$.

3. Érdemes fokozatosan egyre nagyobb kockákat elképzelni, és ezeken megvizsgálni a térfogat és a felszín kapcsolatát.

Ha 2 egység élű kockát építünk, akkor 8 kis kocka kell, de a felszíne $6 \cdot 4 = 24$ kis kockalap, tehát több.

Sorra kipróbálva a 3, 4, 5 élű kocka esetét, kiderül, hogy ezekre még mindig nagyobb a felszín számértéke, mint a térfogaté. A 6 egység élű kocka térfogata pedig szintén $6 \cdot 36 = 216$ kis kockalap. Ekkor tehát a két számérték egyenlő. Ha továbbhaladunk, 7 vagy még nagyobb élű kockát akarunk építeni, akkor már a térfogat nagyobb lesz, mint a felszín. Az építéshez tehát 216 kis kockát kell felhasználni.

4.



A 4×4-es négyzet *AB* oldala és a vele párhuzamos 4 szakasz, tehát összesen 5 szakasz közül bármely kettőt kiválaszthatjuk, ezeken lehet a téglalap két szemköztes oldala. Ezt összesen $(5 \cdot 4) : 2 = 10$ féleképpen tehetjük meg, hiszen a sorrend nem számít.

A másik két oldalt tartalmazó szakaszokat az *AD* irányú 5 szakaszból választhatjuk ki szintén 10 féleképpen. Összesen tehát $10 \cdot 10 = 100$ téglalap látható az ábrán.

Hatodik osztály

1. Hány olyan négyjegyű szám van, amely csupa különböző számjegyekből áll, és minden számjegye páros?

2. Az *ABCD* négyzet oldala 4 cm. Az *AB* oldal felezőpontja *E*, az *AD* oldal felezőpontja *F*. Számítsd ki az *EFC* háromszög területét!

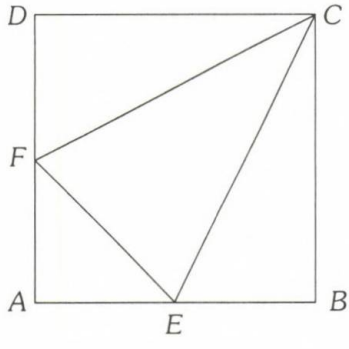
3. Melyek azok a 9-cel osztható háromjegyű számok, amelyek oszthatók számjegyeik összegének négyzetével is?

4. Meg lehet-e számozni egy kocka csúcsait az 1, 2, ..., 7, 8 számokkal úgy, hogy bármelyik él két végpontjára írt számok összege különböző legyen?

A 6. osztály feladatainak megoldása

1. A páros számjegyek: 0, 2, 4, 6, 8. A négyjegyű szám első számjegyére 4 lehetőség van (0 nem lehet), a másodikra szintén 4 (csak az nem lehet, ami az első jegy), a harmadikra 3, a negyedikre 2 lehetőség van. Így összesen $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 96$ a keresett számok száma.

2.



A négyzet területe $4 \cdot 4 = 16$ cm^2. Az *EBC* és *FDC* derékszögű háromszögek egybevágók, mindegyiknek a területe 4 cm^2. Az *AEF* egyenlőszárú derékszögű háromszög területe 2 cm^2. Az *EFC* háromszög területe: $16 - (2 \cdot 4 + 2) = 6$ cm^2.

3. Egy szám akkor és csak akkor osztható 9-cel, ha számjegyeinek összege osztható 9-cel. Egy 9-cel osztható háromjegyű szám számjegyeinek összege tehát 9, 18 vagy 27 lehet. A 27, mint összeg csak a 999 esetben fordul elő, de ez nem osztható $27^2 = 729$-cel, tehát nem felel meg.

Szóba jöhetnek tehát a $9^2 = 81$-gyel és $18^2 = 324$-gyel osztható háromjegyű számok. Elég a 81-gyel osztható számokat nézni, mert $324 = 4 \cdot 81$.

A 11 darab háromjegyű, 81-gyel osztható szám közül a következő 7 jó: 162, 243, 324, 405, 648, 810, 972.

4. A próbálkozások kudarcot vallanak, így azt sejthetjük, hogy a kívánt megszámozás nem lehetséges. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 számokból képezhető párok a következő összegeket adják: 3, 4, 5, ..., 13, 14, 15, azaz összesen 13 különböző számot.

Ahhoz, hogy a 3, 4, 5 összeg kijöjjön, egyik csúcsba 1-et, és a vele élben szomszédos 3 csúcsba 2, 3, 4-et kell írni. Így azonban a 6 összeg nem jöhet ki, mert a 2+4 vagy 1+5 összeg nem szerepelhet.

Hasonló módon, ahhoz, hogy a 13, 14, 15 összeg kijöjjön, egyik csúcsba 8-at, a vele élben szomszédos 3 csúcsba a 7, 6, 5 számokat kell írni. Így azonban a 12 összeg nem jön ki, mert az $5 + 7$ vagy $4 + 8$ összeg nem szerepelhet. Összesen a 12 kockaéle 11 különböző összeg kerülhet.

Hetedik osztály

1. A tízes számrendszerben két kétjegyű szám szorzata egy háromjegyű szám: $AB \cdot CB = DDD$.

Mik lehetnek az egyes számjegyek, ha különböző betűk különböző, azonos betűk azonos számjegyeket jelölnek?

2. Egy 4×4-es táblázat minden mezőjébe egy pozitív egész számot írtunk úgy, hogy bármely két közös oldallal rendelkező mezőbe írt szám

legfeljebb 1-gyel térhet el. Mutassuk meg, hogy biztosan van 3 olyan mező, amelybe azonos számokat írtunk!

3. Jelöljünk ki a síkon 10 pontot úgy, hogy ezek 5 egyenesen helyezkedjenek el, és minden ilyen egyenesen 4 kijelölt pont legyen!

4. Melyek azok az $\overline{abc}$ háromjegyű számok, amelyeknek kétszerese egyenlő a $\overline{cab}$ és $\overline{bca}$ háromjegyű számok összegével (itt különböző betűk azonos számjegyeket is jelölhetnek)?

5. Az $ABCD$ négyzet oldala 6 cm. A BC oldal P pontja C-től, a DA oldal Q pontja A-tól 2 cm távolságra van. Az AP és BQ metszéspontja R, CQ és DP metszéspontja S. Számítsuk ki a $PSQR$ négyszög területét!

A 7. osztály feladatainak megoldása

1. A szorzat így írható a tízes számrendszerben:

$$100D + 10D + D = 111D = 37 \cdot 3D.$$

Mivel 37 prím, tovább már nem bontható szorzattá, és $D \le 9$, $3D \le 27$. A $D = 9$ jó megoldás, mert $37 \cdot 27 = 27 \cdot 37 = 999$.

Ha D páratlan, akkor mivel $3 \cdot 3 = 9$ egyjegyű, csak a $D = 5$ és $D = 7$ jöhetne még szóba, de egyik se jó megoldás.

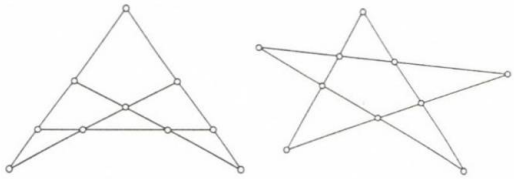
Ha D páros, akkor legyen $D = 2E$, és vizsgálni kell még a $74 \cdot 3E$ alakú lehetséges felbontásokat. Itt csak $E = 4$ jöhetne szóba, de ez sem ad megoldást. A két megoldás tehát $A = 3$, $B = 7$, $C = 2$, $D = 9$, vagy $A = 2$, $B = 7$, $C = 3$, $D = 9$.

2. A 4×4-es táblázat mezőibe így összesen 16 pozitív egész számot írtunk. Jelöljük a legkisebbet m-mel. Ekkor a leghosszabb olyan út, amely szomszédos mezőkön át vezet, és minden lépésben 1-gyel nő a mezőre írt szám, 7 hosszúságú (például az ábrán egy ilyen út van megjelölve).

m			
$m+1$			
$m+2$			
$m+3$	$m+4$	$m+5$	$m+6$

Ez azt jelenti, hogy 7 különböző szám fordulhat elő a táblázatban. Ha mindegyik csak kétszer szerepelne, 14 szám lenne, holott 16 van beírva. Így biztosan van olyan, ami legalább 3-szor szerepel.

3. Például a következő két ábrán látható bármelyik elrendezés megfelelő:



4. Írjuk fel a keresett számot így: $100a + 10b + c$. A feltétel szerint

$$200a + 20b + 2c = 11a + 110c + 101b,$$

amiből rendezés és egyszerűsítés után ezt kapjuk: $7a = 4c + 3b$. Írjuk a kapott egyenlőséget a következő alakba: $7a = 7c + 3(b - c)$.

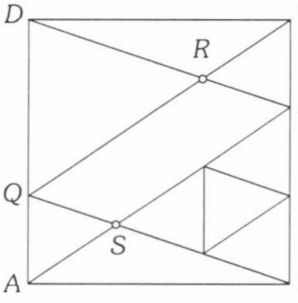
Mivel $7a$-nak és $7c$-nek a 7 osztója, ez csak úgy lehet igaz, ha 7 osztója $3(b - c)$-nek, azaz $b - c$-nek. Mivel b és c számjegyek, $b - c$ csak 7, 0, vagy – 7 lehet.

Ha $b - c = 0$, akkor $a = b = c$, és bármelyik 0-tól különböző számjegy megfelelő (9 megoldás).

Ha $b - c = 7$, akkor $b = 8$, $c = 1$ és $a = 4$, vagy $b = 9$, $c = 2$, $a = 5$.

Ha $b - c = -7$, akkor $b = 1$, $c = 8$ és $a = 5$, vagy $b = 2$, $c = 9$ és $a = 6$. Összesen így 13 megoldást kaptunk.

5.



Az $AQPC$ paralelogramma AQ alapja 2 cm, a hozzá tartozó magassága 6 cm, így területe 12 cm^2.

Az AQS és PCR háromszögek egybevágók. Számítsuk ki a területüket.

A BPS háromszög középvonalai a háromszöget 4 egymással és az AQS háromszöggel is

egybevágó háromszögre darabolják. A *BPS* háromszög területe így négyszerese az *AQS* háromszögének, alapja kétszerese, így magassága is kétszerese. Az *AQS* és *BPS* háromszögek *AQ*, illetve *BP* alapjához tartozó magasságok összege 6 cm, így az *AQS* háromszögé 2 cm. Az *AQS* területe tehát 2 cm^2.

A *PSQR* négyszög területe tehát $12 - 2 \cdot 2 = 8$ cm^2.

Nyolcadik osztály

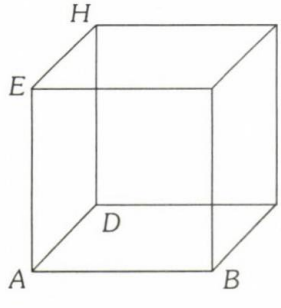
1. Melyik az a három pozitív prímszám, amelyek szorzata egyenlő összegük 7-szeresével?

2. Van-e olyan x és y egész szám, amelyekre teljesül, hogy $3x^2 + 8 = y^2$?

3. Adott egy O_1 középpontú, 3 egység sugarú k_1 kör, és egy O_2 középpontú, 4 egység sugarú k_2 kör a síkon, O_1 és O_2 távolsága 8 egység. Mindegyik kör középpontjából érintőket húzunk a másik körhöz. Igazoljuk, hogy az O_1-ből húzott érintők k_1 körrel való metszéspontjainak távolsága egyenlő az O_2-ből húzott érintők k_2 körrel való metszéspontjainak távolságával!

4. Adjunk meg 7 olyan különböző pozitív egész számot, amelyekre igaz, hogy bárhogyan is választunk ki közülük kettőt, a kiválasztott számok szorzata osztható a különbségükkel!

5. Az *ABCDEFGH* kockát az *EC* testátló egyenese körül 60°-kal elforgatjuk. Jellemezzük az eredeti és az elforgatott kocka közös részét alkotó testet! Hány csúcsa, éle, lapja van, milyen sokszögek a lapjai? Tudjuk, hogy a kocka éle 2 egység, számítsuk ki a kapott test éleinek hosszát!



A 8. osztály feladatainak megoldása

1. Legyen a keresett 3 prímszám p, q és r. A feltétel szerint $pqr = 7(p + q + r)$.

A jobb oldal 7-tel osztható, így a bal oldal is. Három prímszám szorzata akkor és csak akkor osztható 7-tel, ha egyikük 7. Feltehetjük, hogy $r = 7$, így a következő egyenletet kapjuk:

$$pq = p + q + 7.$$

Átrendezve és szorzattá alakítva:

$$(p - 1)(q - 1) = 8 \text{ adódik.}$$

Mivel $p, q \geq 2$, a következő szorzatok jöhetnek szóba: $1 \cdot 8$ vagy $2 \cdot 4$. Az első nem megfelelő, mert $q = 9$ nem prím.

A második felbontásból $p = 3$, $q = 5$ vagy fordítva. A keresett 3 prímszám: 3, 5 és 7. Ezek valóban jók, mert $3 \cdot 5 \cdot 7 = 7(3+5+7)$.

2. Tegyük fel, hogy x és y olyan egész számok, amelyek kielégítik az egyenletet. Mivel $3x^2$ osztható 3-mal, és a 8 a 3-mal osztva 2 maradékot ad, az egyenlet bal oldala 3-mal osztva 2 maradékot ad.

A jobb oldalon áll y^2, így y sem osztható 3-mal. Ekkor $y = 3k+1$ alakú, de ekkor

$$y^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1,$$

azaz 3-mal osztva 1 maradékot ad.

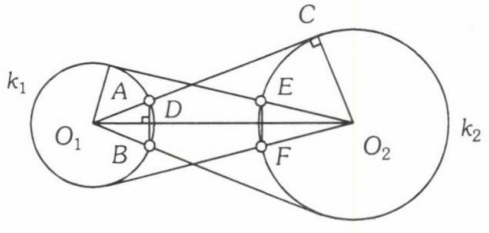
Ha $y = 3k+2$ alakú, akkor

$$y^2 = 9k^2 + 12k + 4 = 3(3k^2 + 4k+1)+1,$$

azaz 3-mal osztva szintén 1 maradékot ad.

Ellentmondásra jutottunk, tehát nincs olyan x és y egész szám, amely kielégíti az egyenletet.

3. Az ábra jelöléseit használjuk.



Az *AB* húr merőleges O_1O_2-re és D a felezőpontja. Az O_1O_2C derékszögű háromszög hasonló az O_1AD derékszögű háromszöghöz, mert az O_1 csúcsban lévő szögük közös.

A hasonlóság miatt

$$\frac{AD}{O_1A} = \frac{O_2C}{O_1O_2}, \text{ azaz}$$

$$AD = \frac{O_2C}{O_1O_2} \cdot O_1A = \frac{3}{8} \cdot 4 = \frac{3}{2}.$$

Az AB húr hossza tehát 3.

Teljesen hasonlóan adódik, hogy EF hossza is 3.

4. Például egy lehetséges konstrukció 7 ilyen számra: $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7! = 5040$. Ebből sorra kihagyunk egyet a 7 tényező közül, csak a többi szorzatát vesszük. Az így kapott 7 szám:

5040, 2520, 1680, 1260, 1008, 860, 720.

Közvetlenül ellenőrizhető, hogy közülük bármely két szám szorzata osztható a különbségükkel.

Megjegyzés: Általában $k > 1$ esetén a megfelelő feladat: adjunk meg k darab olyan pozitív egész számot, amelyre igaz, hogy bármely kettőt is választunk ki közülük, szorzatuk osztható a két kiválasztott szám különbségével.

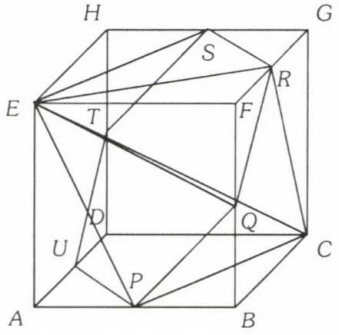
Ebben az esetben is jó az a konstrukció, hogy a $k!$-ból sorra kihagyunk egy-egy tényezőt, és az így kapott k számot vesszük.

Ha ugyanis $1 \le m < n \le k$, akkor

$$\frac{k!}{m} \cdot \frac{k!}{n} = \frac{k!}{m \cdot n} \cdot k! \quad \text{és} \quad \frac{k!}{m} - \frac{k!}{n} = \frac{k!}{m \cdot n} \cdot (n - m).$$

Mivel $1 \le n - m < k$, $k!$ osztható $n - m$-mel, tehát a kívánt tulajdonság igaz.

5. Az ábra jelöléseit használjuk. Legyenek P, Q, R, S, T, U az E és C csúcsba be nem futó élek felezőpontjai. Ezek egy síkban vannak, és egy szabályos hatszöget alkotnak (pl. azért, mert mind az E mind a C csúcstól mind a 6 pont egyenlő távolságra van). Az EC átló merőleges a hatszög síkjára, e körül 60°-kal elforgatva a kockát, a hatszög önmagába megy át. Ebből következik, hogy az eredeti és az elforgatott kocka közös része két, közös alapú szabályos hatoldalú gúla.



A közös résznek tehát 8 csúcsa, 18 éle és 12 lapja van, a lapjai egybevágó egyenlőszárú háromszögek.

Az EAP derékszögű háromszögből Pitagorász tétele miatt $EP = \sqrt{5}$, ugyanennyi az összes E-ből illetve C-ből induló éle a kettős gúlának. A BQP háromszögből Pitagorász tétele szerint $PQ = \sqrt{2}$, ugyanennyi a szabályos hatszög minden oldala.

A tanárképző főiskolák 2002. évi Péter Rózsa Matematikaversenyén kitűzött feladatok (Szombathely, 2002. március 27.)

1. Hány olyan 2002-nél nem nagyobb pozitív egész a szám van, amelyre az

$$\frac{5n+13}{11n+20}$$

tört egyszerűsíthető?

2. Adjuk össze a Pascal háromszög harmadik sorától kezdve minden sor harmadik elemének reciprokát. Konvergens-e az így kapott végtelen sor, és ha igen, mennyi az összege?

3. Adott az egységnyi sugarú k kör, valamint a k kör két, egymással párhuzamos érintője e_1 és e_2. Szerkesszünk egy olyan s_1 kört, amely kívülről érinti k-t, és érinti e_1-et is. Majd szerkesszük meg azt az s_2 kört, amely érinti k-t, e_2-t és s_1-et. Hogyan függ az s_2 kör sugara az s_1 kör sugarának megválasztásától?

4. Határozzuk meg a valós számokon értelmezett, valós értékű f függvény periódusát, ha

$$f(x) = \sin ax - \cos\frac{x}{a}$$

és $a \neq 0$ rögzített valós szám!

5. Az $ABCD$ négyzet belsejében P és Q olyan pontok, amelyekre $PAQ\sphericalangle = PCQ\sphericalangle = 45°$. Fe-

jezzük ki a PQ szakasz hosszát a BP és DQ szakaszok hosszával!

6. Adjuk meg azokat az x racionális számokat, amelyekre teljesül, hogy $\sqrt{x^2 - x + 1}$ is racionális szám!

7. Adott 11 pozitív egész szám, amelyek egyikének sincs 30-nál nagyobb prímosztója. Bizonyítsuk be, hogy a számok közül kiválasztható néhány különböző (esetleg csak egy, esetleg az összes) úgy, hogy a kiválasztott számok szorzata négyzetszám!

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: Kosztolányi József

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2002. augusztus 31.

200. Mutassuk meg, hogy bármely pozitív egész n esetén az első 10^n darab pozitív egész számban összesen annyi számjegy van, mint ahány 0 az első 10^{n+1} darab pozitív egész számban összesen!

201. Az ABC háromszög A, B és C csúcsaihoz tartozó belső szögfelezők a háromszög körülírt körét rendre a D, E és F pontokban metszik. Bizonyítsuk be, hogy

$$BD \cdot DC \cdot CE \cdot EA \cdot AF \cdot FB = 4R^4 \cdot r^2,$$

ahol R a háromszög körülírt, r a háromszög beírt körének sugara!

Bíró Bálint, Eger

202. Jelölje az ABC háromszög félkerületét s, beírt körének sugarát r, körülírt körének sugarát R. Igazoljuk, hogy

$$\frac{s^2 - (r+2R)^2}{4R^2} \le \frac{1}{8}!$$

Oláh György, Révkomárom

203. Határozzuk meg azokat a folytonos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvényeket, melyek grafikonjának x tengellyel párhuzamos eltolása helyettesíthető egy x tengelyű merőleges affinitással!

Rakonczai György, Budapest

204. Melyik az a legkisebb pozitív egész n szám, amelyre teljesül, hogy ha egy 2002×2002-es, kezdetben színezetlen sakktáblán n mezőt kiszínezünk, akkor van három olyan színezett mező, amelyek középpontjai olyan derékszögű háromszöget határoznak meg, amelynek befogói párhuzamosak a tábla oldalaival?

USA Mathematical Olympiad (2000) egyik feladata alapján

Feladatmegoldások (185-189. feladatok)

185. Bizonyítsuk be, hogy két szomszédos háromszögszám négyzetének összege háromszögszám!

Megoldás: Az n-edik háromszögszám:

$$t_n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Így

$$t_n^2 + t_{n+1}^2 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2 + \left[\frac{(n+1)(n+2)}{2}\right]^2 =$$

$$= \frac{(n+1)^2}{4}\left[n^2 + (n+2)^2\right] =$$

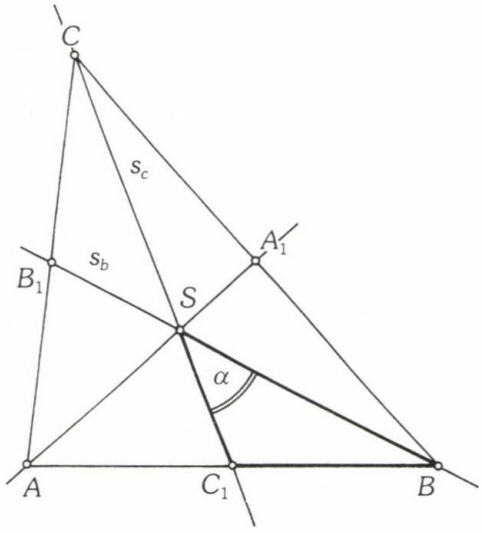
$$= \frac{(n+1)^2\left[(n+1)^2+1\right]}{2} = t_{(n+1)^2}$$

A megoldók száma: 16.

186. Jelölje az ABC háromszög területét T, a B és C csúcsokhoz tartozó súlyvonalak hosszát pedig rendre s_b és s_c. Mutassuk meg, hogy az s_b akkor és csak akkor merőleges s_c-re, ha $3T = 2s_bs_c$!

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

Megoldás: Könnyen bizonyítható, hogy a háromszöget három súlyvonala hat egyenlő területű háromszögre bontja. Jelölje az ABC háromszögben C_1 az AB oldal felezőpontját, S a súlypontot, α pedig az s_b és s_c súlyvonalak hajlásszögét *(1. ábra)*.



1. ábra

Az SC_1B háromszög területe

$$T_{SC_1B} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}s_c\cdot\frac{2}{3}s_b\cdot\sin\alpha = \frac{1}{9}s_bs_c\sin\alpha.$$

Az ABC háromszög területe ennek hatszorosa, azaz

$$T_{ABC} = \frac{2}{3}s_bs_c\sin\alpha.$$

Bármely háromszögre érvényes tehát, hogy

$$3T = 2s_bs_c\sin\alpha.$$

Látható, hogy $3T = 2s_bs_c$ pontosan akkor teljesül, ha $\sin\alpha = 1$, azaz $\alpha = 90°$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 16.

187. Igazoljuk, hogy ha az

$$x^4 + ax^3 + 2x^2 + bx + 1 = 0$$

egyenletnek van valós gyöke, akkor $a^2 + b^2 \geq 8$ $(a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R})$!

I. megoldás: Tegyük fel, hogy az x valós szám gyöke az egyenletnek. Mivel x nem lehet 0, ezért x^2-tel osztva

$$ax + \frac{b}{x} = -\left(2 + x^2 + \frac{1}{x^2}\right).$$

A Cauchy-féle egyenlőtlenség alapján

$$(a^2+b^2)\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right) \geq \left(ax+\frac{b}{x}\right)^2 =$$

$$= \left(2 + x^2 + \frac{1}{x^2}\right)^2,$$

ami ekvivalens az

$$a^2 + b^2 \geq \frac{4}{x^2+\frac{1}{x^2}} + 4 + x^2 + \frac{1}{x^2}$$

egyenlőtlenséggel. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$\frac{4}{x^2+\frac{1}{x^2}} + x^2 + \frac{1}{x^2} \geq$$

$$\geq 2\sqrt{\frac{4}{x^2+\frac{1}{x^2}}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)} = 4.$$

Kaptuk tehát, hogy

$$a^2 + b^2 \geq 4 + 4 = 8,$$

és ezt akartuk bizonyítani.

Egyenlőség teljesül, ha $a=b=2$, vagy $a=b=-2$. Az első esetben $x=-1$, a második esetben $x=1$ gyöke az egyenletnek.

Csorba Ferenc, Győr
Dályay Pál Péter, Szeged
Kiss Géza, Kisújszállás
Tóth Sándor, Sárospatak

II. megoldás: Ha az egyenlet gyökei x_1, x_2, x_3, x_4, akkor a Viéte-féle képletek alapján

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = -a$$
$$(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4 = 2$$
$$(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2 = -b$$
$$x_1x_2x_3x_4 = 1.$$

Ezekkel

$$a^2 + b^2 - 8 = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4)^2 +$$
$$+\left[(x_1 + x_2)x_3x_4 + (x_3 + x_4)x_1x_2\right]^2 -$$
$$-4\left[(x_1 + x_2)(x_3 + x_4) + x_1x_2 + x_3x_4\right] =$$
$$= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_1^2x_2^2x_3^2 +$$
$$+x_1^2x_2^2x_4^2 + x_1^2x_3^2x_4^2 + x_2^2x_3^2x_4^2.$$

Az egyenlőség jobb oldalához a $2x_1x_2x_3^2x_4^2$ és a $2x_1^2x_2^2x_3x_4$ tagokat hozzáadva, majd kivonva, összevonások után kapjuk, hogy

$$a^2 + b^2 - 8 = (x_1 - x_2)^2(x_3^2x_4^2 + 1) +$$
$$+(x_3 + x_4)^2(x_1^2x_2^2 + 1). \qquad (1)$$

Mivel az egyenletnek van valós gyöke, ezért vagy mind a négy gyök valós, vagy két gyök valós és két gyök komplex úgy, hogy a komplex gyökök egymás konjugáltjai.

1. eset: Ha az egyenletnek négy valós gyöke van, akkor (1) jobb oldala nem negatív, azaz a bizonyítandó egyenlőtlenség teljesül. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $x_1 = x_2$ és $x_3 = -x_4$.

2. eset: Ha az egyenletnek két valós és két komplex gyöke van, akkor legyenek x_1 és x_2 valós, x_3 és x_4 pedig komplex konjugált gyökök. Mivel $x_3 + x_4$ is és x_3x_4 is valósak, ezért (1) most is teljesül. Egyenlőség itt is akkor áll fenn, ha és $x_1 = x_2$ és $x_3 = -x_4$. Ez utóbbi azt jelenti, hogy a komplex gyökök valós része 0.

Molnár István, Gyula

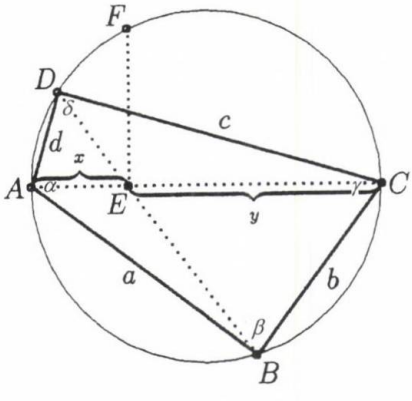
A megoldók száma: 14.

188. Egy négyoldalú gúla alaplapja olyan húrnégyszög, amelynek oldalai valamilyen körüljárási irány szerint rendre 20, 15, 24, 7 cm hosszúak. A gúla magasságának talppontja az alaplap átlóinak metszéspontja. Mekkora magasság esetén lesz a gúla köré írt gömb térfogata a legkisebb?

Fitos László, Esztergom

Megoldás: A körülírt gömb térfogata akkor a legkisebb, amikor sugara a legkisebb. A gúla köré írt gömb sugara nem kisebb, mint a gömbre illeszkedő és a gúla alapnégyszöge köré írt kör sugara. Az alapnégyszög köré írt kör sugara kiszámítható. Ha a húrnégyszög oldalai rendre $a = 20$ cm, $b = 15$ cm, $c = 24$ cm és $d = 7$ cm *(2. ábra)*, akkor az ABC és ADC háromszögekre felírt koszinusztételek alapján

$$a^2 + b^2 - 2ab\cos\beta = c^2 + d^2 - 2cd\cos\delta.$$

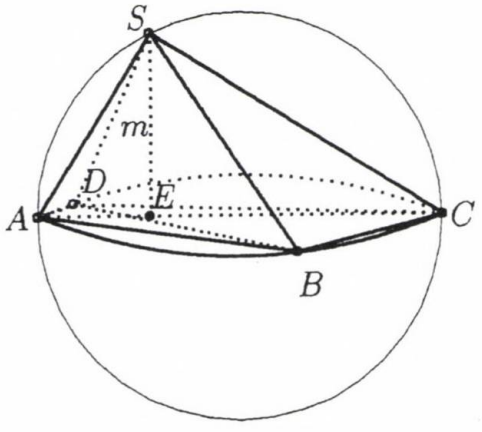


2. ábra

Mivel $a^2 + b^2 = c^2 + d^2$, valamint $\beta + \delta = 180°$, ezért $\beta = \delta = 90°$. Pitagorasz tételéből $AC = 25$ cm, így az alapnégyszög köré írt kör sugara $r = 12{,}5$ cm.

A gúla köré írt gömb sugarának minimuma tehát $r = 12{,}5$ cm. Könnyen belátható, hogy van olyan, a feladat feltételeinek megfelelő gúla, amelynek köréírt gömbje r sugarú.

Ha E jelöli az alapnégyszög átlóinak metszéspontját, és ha az E pontban az $ABCD$ négyszög síkjára állított merőleges egyenesnek az AC átmérőjű gömbbel vett metszéspontjai közül bármelyiket választhatjuk egy gúla S csúcsának, akkor az $SABCD$ gúla magassága $SE = m$ *(3. ábra).*



3. ábra

Mivel a gömb középpontja az AC felezőpontja, ezért az SAC sík a gömböt az AC átmérőjű körben metszi. Ha $AE = x$ és $EC = y$ *(2. ábra),* akkor az SAC derékszögű háromszögre felírt magasságtétel alapján $m = \sqrt{xy}$. Viszont $m = EF$ is teljesül, ahol F az alapnégyszög köréírt körének egyik olyan pontja, amelyre AC és EF merőlegesek egymásra *(2. ábra).*

x és y meghatározásához vegyük figyelembe, hogy egyrészt $x + y = 25$ cm, másrészt

$$\frac{x}{y} = \frac{T_{ADE}}{T_{CDE}} = \frac{T_{ABE}}{T_{CBE}} = \frac{T_{ABD}}{T_{CBD}} = \frac{ad\sin\alpha}{bc\sin\gamma} = \frac{ad}{bc} = \frac{7}{18},$$

ahonnan adódik, hogy $x = 7$ cm, $y = 18$ cm. Így

$$m = \sqrt{xy} = \sqrt{126}\ \text{cm} = 3\sqrt{14}\ \text{cm} \approx 11{,}22\ \text{cm}.$$

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 13.

189. Van-e olyan $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ függvény, amelyre bármely valós x és y esetén teljesül, hogy

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|?$$

USA Mathematical Olympiad, 2000

I. megoldás: Teljes indukcióval be fogjuk látni, hogy a feladatbeli egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} - f\left(\frac{x+y}{2}\right) \geq 2^n|x-y| \qquad (1)$$

bármely valós x és y, valamint bármely n természetes szám esetén. Ebből pedig adódik, hogy nincs a feladat feltételeinek megfelelő függvény, ugyanis rögzített x és y ($x \neq y$) esetén a bal oldal rögzített, a jobb oldal viszont tetszőlegesen nagy lehet.

$n = 0$ esetén a feladat egyenlőtlenségét kapjuk, amiről tudjuk, hogy teljesül.

Tegyük fel a továbbiakban, hogy valamely pozitív egész n esetén teljesül (1).

Ekkor $x = a$, $y = a + 2b$ ($a, b \in \mathbb{R}$) választással

$$\frac{f(a)+f(a+2b)}{2} \geq f(a+b) + 2^{n+1}|b|,$$

$x = a + b$, $y = a + 3b$ választással

$$f(a+b)+f(a+3b) \geq 2(f(a+2b)+2^{n+1}|b|),$$

végül $x = a + 2b$, $y = a + 4b$ választással

$$\frac{f(a+2b)+f(a+4b)}{2} \geq f(a+3b)+2^{n+1}|b|.$$

Az így kapott három egyenlőtlenséget összeadva, majd a közös tagokat mindkét oldalból kivonva

$$\frac{f(a)+f(a+4b)}{2} \geq f(a+2b)+2^{n+3}|b|.$$

Ez bármely valós a és b esetén teljesül, így az $x = a$, $y = a + 4b$ helyettesítéssel kapjuk, hogy bármely valós x és y esetén

$$\frac{f(x)+f(y)}{2} \geq f\left(\frac{x+y}{2}\right)+2^{n+1}|x-y|.$$

Ezzel indukciós bizonyításunkat befejeztük, és beláttuk, hogy nincs a feladat feltételeinek megfelelő függvény.

Kamarás Lajos (Pécs) megoldása alapján

II. megoldás: Rögzített pozitív egész n-re legyen

$$g(k)=f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right) \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

A feladatbeli egyenlőtlenség

$$x=\frac{k+2}{n},\ y=\frac{k}{n}$$

helyettesítéssel

$$\frac{f\left(\frac{k+2}{n}\right)+f\left(\frac{k}{n}\right)}{2} \geq f\left(\frac{k+1}{n}\right)+\frac{2}{n},$$

ahonnan

$$f\left(\frac{k+2}{n}\right)-f\left(\frac{k+1}{n}\right) \geq$$
$$\geq f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)+\frac{4}{n}.$$

Ez azt jelenti, hogy

$$g(k+1) \geq g(k)+\frac{4}{n}.$$

Hasonlóan látható, hogy bármely $i \in \{1; 2; ...; n\}$ esetén

$$g(k+i) \geq g(k+i-1)+\frac{4}{n}.$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva, majd a mindkét oldalon megjelenő tagokat elhagyva kapjuk, hogy

$$g(k+n) \geq g(k)+4.$$

A g függvény definíciója alapján ez azt jelenti, hogy

$$f\left(\frac{k+1+n}{n}\right)-f\left(\frac{k+n}{n}\right) \geq$$
$$\geq f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)+4.$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket $k = 0$-tól $k = n-1$ -ig felírva, összeadva és a mindkét oldalon fellépő tagokat elhagyva az

$$f(2)-f(1) \geq f(1)-f(0)+4n$$

egyenlőtlenség adódik. Mivel n tetszőleges pozitív egész szám, ezért nincs a feltételeknek megfelelő függvény.

Bencze Mihály (Brassó),
Dályai Pál Péter (Szeged),
Kiss Géza (Kisújszállás)
és Tuzson Zoltán (Székelyudvarhely)
megoldása alapján

A megoldók száma:10.

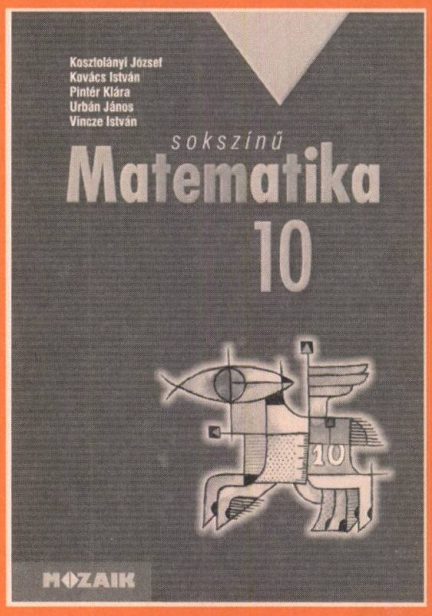
A megoldók névsora: Bencze Mihály, Brassó (189.); Bíró Bálint, Eger (185-188.); Csorba Ferenc, Győr (185-188.); Dályay Pál Péter, Szeged (185-189.); Horváth Géza, Zselíz (185., 186., 188.); Kamarás Lajos, Pécs (185-189.); Kiss Géza, Kisújszállás (185-189.); Kiss Zoltán, Pécs (185-189.); László Sándor, Szombathely (185-187.); Molnár István, Gyula (185-188.); Nagy Béla, Sarkad (185-189.); Oláh György, Révkomárom (185., 186.); Rakonczai György, Budapest (185-189.); Schmidt Edit, Budapest (185-189.); Tóth Sándor, Sárospatak (185-188.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (185-187., 189.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (185-189.).

KERETTANTERV SZERINTI ÚJ MATEMATIKA TANKÖNYVEK

Az új, 1–12. évfolyamot átfogó

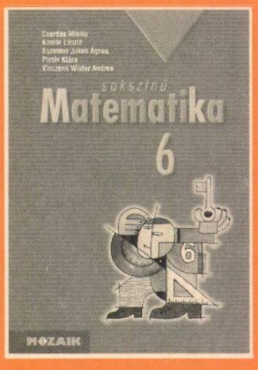
SOKSZÍNŰ MATEMATIKA

tankönyvsorozat új színfoltot jelenthet a matematikaoktatásban. A kerettanterv alapján készülő tankönyvek tartalmukban és felépítésükben is korszerűek, játékos és gyakorlatias módon dolgozzák fel a tananyagot. A kötetek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.



A kötetek szerzői: *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

KÖNYVAJÁNLAT A MATEMATIKA TANÍTÁSÁHOZ



MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

VERSEGI KÖNYVTÁR SZOLNOK 2

Inverz feladatok az iskolai matematikaoktatásban

(Dr. Ambrus András – Dr. Wolfgang Schulz)

Matematikai versenytesztekről I.

(dr. Kántor Sándorné dr. Varga Tünde)

Megjegyzések a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenségek alkalmazásához

(Ábrahám Kinga – Csorba Ferenc)

X. ÉVFOLYAM 2002 4

MOZAIK
www.mozaik.info.hu

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 1100 Ft

A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási
Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

Inverz feladatok az iskolai matematikaoktatásban
Dr. Ambrus András egyetemi docens, Budapest
Dr. Wolfgang Schulz professzor, Berlin

Matematikai versenytesztekről I.
dr. Kántor Sándorné dr. Varga Tünde
adjunktus, Debrecen

Egy Makowski-féle egyenlőtlenségről
Csete Lajos tanár, Markotabödöge

Megjegyzések a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenségek alkalmazásához
Ábrahám Kinga tanár, Sopron
Csorba Ferenc tanár, Győr

A XXXI. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről
Urbán János tanár, Budapest

Feladatrovat tanároknak

Közlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

Dr. Ambrus András – dr. Wolfgang Schulz

Inverz feladatok az iskolai matematikaoktatásban

KÖNYVTÁR SZOLNOK

Feladatok szerkezete

Ha mindhárom komponens világosan, egyértelműen meg van adva, zárt feladatról beszélünk. Példa: A másodfokú egyenlet megoldóképletével oldjuk meg a következő egyenletet.

$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

Ha valamelyik komponens nincs explicit meghatározva, nyitott feladatokról beszélünk. Az alábbiakban a feladatok lehetséges variánsait mutatjuk be. Az osztályozás nem teljes, átfedések lehetnek. Az egyes kategóriák a hiányzó komponens (ek) dominanciáját jelentik.

Kiindulási szituáció	Transzformációs lépések	Célszituáció
+	+	+
+	+	–
+	–	+
–	+	+
+	–	–
–	+	–
–	–	+
–	–	–

Példák

+ + + A fenti másodfokú egyenlet megoldása a megoldóképlettel

+ + + $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)}=?$

Sejtés! Sejtését bizonyítsa be teljes indukcióval!

+ – + Bizonyítsa be Pitagórasz tételét!

– + + Koszinusz-tétel kiterjesztése tompaszögű háromszögekre. (A hegyesszögű esetet már bebizonyítottuk)

– – + Bizonyítsuk be, hogy $\sqrt{2}$ irracionális!

– + – Adjon meg két feladatot a teljes indukció alkalmazására!

+ – – Vizsgáljuk 4 tetszőleges szomszédos természetes szám szorzatát, a szorzathoz adjunk 1-et. Sejtés? Sejtését bizonyítsa be!

– – – Keressen összefüggéseket a Pascal háromszögben!

Inverz (fordított) feladatok

A továbbiakban leszűkítjük vizsgálódásainkat a fordított feladatokra. A fordított feladatokat a fenti osztályozás alapján a nyitott feladatok közé sorolhatjuk, amikor a célszituáció ismert és a kezdeti szituációt kell meghatározni.

Néhány példa az oktatási gyakorlatból:

Alapműveletek – fordított műveletek

Hatványozás – gyökvonás

Beszorzás (zárójel felbontása) – Kiemelés (szorzattá alakítás)

Logaritmizálás – hatványozás

Egy szám osztóinak meghatározása – osztókból a szám meghatározása

Tétel – Tétel megfordítása

Célirányos megoldási stratégia – Fordított irányú okoskodás

Kitűzött feladatok megoldása – Feladatok konstruálása a tanulók által

Függvény – Függvény inverze

Pedagógiai, pszichológiai, matematika-didaktikai alappozíciók

1. *Krutetski* a matematika elsajátítása egyik legfontosabb alapképességének tartja egy gondolatmenetről az ellentétes irányú gondolatmenetre való „átkapcsolást".

2. Gyakori tanulói hiba a kétféle irány összekeverése, ezért sok tanár inkább az elkülönítést követi, azaz egy műveletet és annak fordított műveletét elkülönülten tanítja.

3. Az egymással fordított irányú tevékenységek, műveletek, feladatok, tételek, függvények időben egyszerre való kezelése révén tanítási időt takarítunk meg.

4. A kétirányú feladatok azonos időben való (párhuzamos) kezelése révén ugyanazon tanítási anyagot két különböző pozícióból tekintjük. Az elkülönített tanítás esetén bár a tanuló elsajátítja a kétféle irány különbözőségét, nem szerez tapasztalatokat az egyik gondolkodási irányról a másikra való átmenetben, ami a gondolkodás fejlődésének egyik alapvető komponense. A későbbiek során a helyes irány kiválasztása a hatékony feladatmegoldás feltétele lesz.

5. A fordított irányú feladat az eredeti feladat ellenőrzéseként is fölfogható.

6. A matematika hatékony elsajátítása gazdag fogalomhálózatok kiépítését jelenti, melyeknél a fordított irányú kapcsolatok a horizontális komponensek részei. (A vertikális kapcsolatokat az általánosítások jelentik.)

7. Pavlov szerint a pszichikai tevékenységek ciklikus folyamatokon, körfolyamatokon nyugszanak, melyek zárt információfolyamatokat jelentenek. E struktúra jellemzője, hogy a körfolyamat tetszőleges eleméből kiindulva a ciklus összes eleméhez eljuthatunk. A legújabb pszichológiai kutatások szerint is bizonyos gondolathálók olyan jól strukturáltak, hogy egy egységként működnek, melynek egy pontját aktivizálva a teljes gondolatháló működésbe hozható. A kétféle irány párhuzamos kezelése révén nagyobb esély van arra, hogy a tanuló ismeretei nem egymástól elszigetelten tárolódnak, hanem gazdag kapcsolathálók keletkeznek.

8. Jobban emlékezünk olyan információkra, melyek egy nagyobb gondolatháló részei.

9. A matematikából tehetséges tanulók számára nem jelentenek gondot a fordított irányú feladatok, a fordított irányú okoskodások; a konkrét problémák, szituációk alapján intuitíve elsajátítják a különbségeket. Az átlagos és gyengébb tanulók számára explicit magyarázatok és gyakorlatok szükségesek.

Néhány konkrét példa

1. *Téglalap kerületének illetve területének kiszámítása az oldalakból* rutinfeladatnak számít.

A fordított feladat: Két adott pozitív számból mint kerület illetve terület mérőszámából a téglalap oldalainak meghatározása nyitott feladatnak számít, mivel többféle megoldási mód lehetséges. (A kerületből az egyik oldal segítségével a másik kifejezhető, így egyismeretlenes egyenlet elegendő a kérdéses adatok meghatározásához; egyenletrendszer algebrai megoldása; grafikus megoldás.)

Fölvethető a kérdés: *a két megadott pozitív szám mint kerület ill. terület mérőszáma, tetszőleges lehet, vagy valamilyen feltételt ki kell elégíteniük?*

Az oldalak összege és szorzata szerepel, így kézenfekvő ötlet a számtani és mértani közepek kapcsolatának felhasználása.

$$K = 2(a + b) \qquad T = ab$$

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \qquad \frac{K}{4} \geq \sqrt{T}$$

Természetesen ugyanezen feltételt kapjuk a másodfokú egyenlet diszkriminánsának vizsgálatával.

A feladat variálása

a) Adott kerület mellett az oldalak (esetleg terület) meghatározása. Milyen esetben lesz a lehető legnagyobb a téglalap területe?

b) Az adott számot (kerületet) mint kerítésdrótot tekintjük. Milyen esetben tudunk a lehető legnagyobb téglalap alakú területet elkeríteni?

c) A téglalap egyik oldalát egy folyó alkotja. A kerítésdrótot a másik három oldalra használhat-

juk föl. Mikor lesz a legnagyobb az elkerített terület?

d) A folyó helyett egy kőfal alkotja a téglalap egyik oldalát. Mikor legnagyobb a terület? (A kőfalat teljes hosszában felhasználjuk.)

A kőfal hosszúságától függően két eset lehetséges: a kőfal meghosszabbítása lesz a megoldás, illetve a kőfal lesz az egyik oldal. A szélsőérték-hely ennél rövidebb oldalt eredményezne, itt a teljes kőfal lesz a lehető legnagyobb területű téglalap egyik oldala.

e) Adott terület mellett a lehetséges oldalak meghatározása. Milyen esetben lesz a legkisebb a kerület?

2. Az oktatási gyakorlatban gyakran fordul elő két szám összegének, különbségének, szorzatának, hányadosának a meghatározása különböző számhalmazokon belül.

A fordított feladat: adott szám két szám összegeként, különbségeként, szorzataként, hányadosaként való felírása a megfelelő műveletek tárgyalásakor nem szokott előfordulni.

Ne csodálkozzunk, hogy a következő feladat nagy nehézséget okoz a tanulók többsége számára az alsóbb osztályokban!

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\ldots\ldots\ldots+\frac{1}{99\cdot 100}=?$$

Elemi szinten a megoldás az egyes tagoknak két tört különbségeként való felírását kívánja meg.

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ldots+\frac{1}{99}-\frac{1}{100}=1-\frac{1}{100}$$

Felsőbb osztályokban a teljes indukció alkalmazásával is megoldható a feladat. Gyakori tanulói hiba a következő „egyszerűsítés":

$$\frac{x+4}{2}=x+2$$

A fordított irányú okoskodás, azaz a polinom két polinom összegeként való felírása segíthet a hiba elkerülésében.

A felsőbb osztályokban a parciális törtekre bontásnál is a fordított irányra van szükségünk, amikor egy polinomot két polinom összegére bontunk.

3. Jelentős tanulói nehézségeket okoz az *azonosságok kétirányú alkalmazása.* Matematikai szempontból nézve a két oldal ekvivalenciájáról van szó. Eszerint, ha szimbólumokkal van kifejezve az azonosság, akkor mindkét irányú olvasatnak, alkalmazásnak menni kellene. Érdekes megfigyelni a tankönyveket. A legtöbb esetben a szimbólumos megadás mellett a balról jobbra való olvasatot fogalmazzák meg. (Egyenlő alapú hatványok szorzása, Kéttagú összeg négyzete stb.) Egy tankönyvet találtunk (Dr. Korányi: Matematika 9. Konsept-H Kiadó), ahol a hatványozás azonosságai közül kettőnél mindkét irányban megfogalmazza verbálisan is az azonosságot. (Szorzat hatványa – Egyenlő kitevőjű hatványok szorzása. Hányados hatványa – Egyenlő kitevőjű hatványok osztása) A többi azonosságot csak egyik irányból fogalmazza meg.

Érdemes megvizsgálni a feladatgyűjteményeket. A legtöbb feladat a jobbról balra való irányt követeli meg, azaz a fordított irányú feladatot.

$$2^{x+1}=2^1\cdot 2^x$$

$$2^{2x}=(2^x)^2$$

Tapasztalataink szerint a közepes és gyengébb tanulók számára szükséges a fenti azonosságok minkét irányú verbális megfogalmazása és alapos begyakoroltatása.

4. Függvényekkel kapcsolatban a függvényábrázolás, jellemzés, értékek meghatározása számít standard feladatnak. A függvények megadása történhet egy konkrét szituáció verbális leírásával, táblázattal, grafikonnal, szimbólumokkal.

A táblázatból leolvasható, hogy összesen 12 feladattípus képezhető, azaz hat feladat – fordított feladatpár. Matematikaoktatási gyakorlatunkban főleg a *képlet, egyenlet → szituáció megadása* típusú feladat hiánycikk.

Példa: *Az $y = 4x + 2$ egyenlettel megadott lineáris függvényhez adjunk meg egy olyan konkrét szituációt, melynek matematikai modellje az adott függvény!*

5. Geometriai alakzatok képének megszerkesztése egybevágósági ill. hasonlósági transzformá-

Transzformálás Kiindulás	szituációk, képek, leírások	táblázat	grafikon	képlet, szimbolikus megadás
		MODELLALKOTÁSI KÉSZSÉGEK		
szituációk, képek, verbális leírások	INTERPRETÁCIÓS KÉPESSÉGEK	mérések	ábrázolás	analitikus modellezés
táblázatok	leolvasás		egyes pontok felvétele	egyenlet megadása
grafikonok	interpretáció	leolvasás		görbéhez tartozó egyenlet
képletek	paraméter	számolás	grafikon felvázolása	

ciók segítségével standard feladatnak számít. A fordított feladat – egy összetett alakzaton észrevenni, hogy két részalakzat bizonyos transzformációkkal egymásba vihető – komoly tanulói nehézséget okoz. Kezdettől fogva tudatosan kell váltakozva szerepeltetni szerkesztési feladatokat, illetve adott alakzatokhoz a megfelelő transzformáció megadása típusú feladatokat.

6. Geometriai szerkesztési feladatoknál gyakran túl hamar általános adatok szerepelnek adottként. Elvárjuk a teljes diszkussziót. Feltétlenül szükséges a másik irány is, amikor konkrét adatok szerepeltetése után különböző megoldás számok jönnek ki. Az átlagos tanulók számára szükséges ezen konkrét tapasztalat, amikor valóban megszerkesztik az alakzatokat. A másik irány egy feltételes okoskodást kíván: *Ha ekkorák az adatok, két megoldás van, stb.*

Példa: Szerkessz háromszöget, ha adott két oldala és az egyikhez tartozó magassága! Megelőző feladatként ajánlatos mindhárom esetre: – 2 megoldás, 1 megoldás, 0 megoldás – megfelelő kiindulási adatokat szerepeltetni.

a=2 cm	b=3 cm	m_b=1,5 cm
a=2 cm	b=3 cm	m_b=2 cm
a=2 cm	b=3 cm	m_b=2 cm

Ezután jöhet az általános eset megoldása.

7. Gyakori feladat a koordinátageometriában két egyenes metszéspontjának a meghatározása. Feladatgyűjteményeinkben és tankönyveinkben a témához tartozó részben nem találkozunk a fordított feladattal, azaz adott ponton átmenő (legalább) két egyenes egyenletének meghatározásával. Az érettségi összefoglaló feladatgyűjteményben viszont találkozunk olyan feladattal, ahol adott ponton átmenő egyenesek egyenletét kell meghatározni.

Mekkora szöget zár be az x tengely pozitív ágával az $y = x^2$ parabola 2 abszcisszájú pontjába húzható érintő?

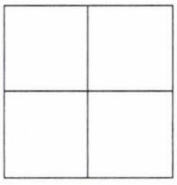
Mivel a normál tagozaton nincs differenciálszámítás, a (2,4) ponton átmenő egyenes-sereg azon tagját kell kiválasztani, melynek egy közös pontja a van a parabolával. (A másodfokú egyenlet diszkriminánsa 0)

8. Egyenletek megoldásánál a bonyolultabb egyenletekről az egyszerű formára való áttérés a domináns. Az ekvivalens átalakítások lényegét jobban megértik a tanulók, ha fordított irányú feladatokat is kitűzünk.

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & 3x-8=? & & \\
 & & \uparrow & & \\
 & & 3x=? & & \\
 & & \uparrow & & \\
x-7=? & \leftarrow & \boxed{x=5} & \rightarrow & x+9=? \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 2x=? & & \\
 & & \downarrow & & \\
 & & 2x+7=? & &
\end{array}
$$

9. Általános összefüggés megsejtése, bizonyítása, illetve általános összefüggés alkalmazása konkrét feladatokra.

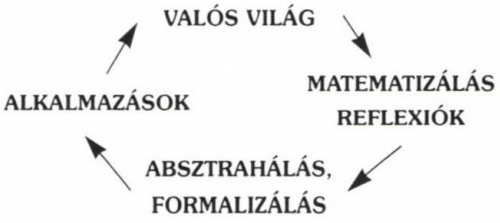
Példa: Osszunk fel egy négyzetet 2002 kisebb négyzetre átfedés és kimaradó rész nélkül! Ha így tűzzük ki a feladatot, nagyon kevés tanuló – sőt egyetemi hallgató – boldogul vele. Célszerű a másik irányból indulni, azaz először azt a feladatot kitűzni, hogy osszunk fel egy négyzetet annyi kisebb négyzetre, amennyire tudjuk!
Az utóbbi variáns esetén minden tanuló talál néhány konkrét felosztást, ha az általános összefüggést nem is találja meg. Ha több konkrét eset kész, azok összehasonlításával könnyebben rájöhet a kulcsötletre, arra, hogy egy négyzetet a középvonalai behúzásával négy kisebb négyzetre oszthatunk, azaz a résznégyzetek száma 3-mal növekszik.



Érdemes megjegyezni, hogy Magyarországon az első variáns szerepel gyakorta, míg például Tall professzor (Warwick University England) budapesti látogatása alkalmával az utóbbi variánst használta akkori középiskolai osztályomban, ami a két ország tanítási filozófiáját is talán visszatükrözi. Egy kitűnő tanár ismerősöm mondta: *Természetesen megmondjuk tanulóinknak, hogy először a konkrét, egyszerű eseteket kell vizsgálni.*

A probléma ott van, hogy kinek az igénye szerint tanítunk: az elit vagy a többség, azaz a 90% igénye szerint?

10. Alkalmazási feladatoknál a tanulóknak meg kell találniuk a megfelelő matematikai modellt. Ha a matematikai ismereteket tisztán matematikán belüli úton alakítottuk ki, nagy nehézségeik lesznek a tanulóknak a megfelelő matematikai modell kiválasztásában. Pszichológiailag megfelelőbbnek tűnik, ha konkrét, gyakorlati szituációból indulunk ki, majd ennek sematizálásával, elemzésével jutunk el a matematikai modellhez, amit az adott szituáció tartalmaz. Tulajdonképpen a teljes ciklust így tudjuk kialakítani.



Irodalom

[1] Aebli, H.: Zwölf Grundformen des Lehrens, Klett Kotta Stuttgart 1987

[2] Ambrus, A,; Hortobágyi, I: Aufgaben zur Festigung des Funktionbegriffs. In: Flade, L.; Herget, W.: (Hrsg.) Mathematik lehren und lernen nach TIMSS. Volk und Wissen Berlin 2000

[3] Ambrus, A.; Schulz. W.: Offene Aufgaben beun Arbeiten mit Funktionen in der Sekundarstufe I, Beiträge zum Mathematikunternchct Franzbecker Verlag Hildesheim 2001, 69 – 72

[4] Erdnijew, P. M.: Übungsformen im Mathematikunterricht, Volk und Wissen, Berlin 1977

[5] Krutetski, V. A.: The Psychology of Mathematical Abilities in Schoolchildren, The University of Chicago Press 1977

[6] Wiegand, B.; Blum, W.: Offene Probleme für den Mathematikunternchct – Kann man Schulbücher dafür nutzen? Beitrage zum Mathematikunternchct Franzbecker Verlag Hildesheim 2001.

[7] Winter, H.: Begriff und Bedeutung des Übens im Mathematikunternchct. Mathematik lehren Heft 2, 1984, 4

[8] Wittmann, E. Ch.: Grundfragen des Mathematikunternchts, Vieweg Braunschweig, /. Auflage 1981

Dr. Kántor Sándorné dr. Varga Tünde

Matematikai versenytesztekről I.

Történeti áttekintés

Az 1997-98. évi Varga Tamás Napok egyik előadása már foglalkozott matematikai tesztekkel. A tesztek iskolai alkalmazása nem új keletű. Tantárgypedagógia-történeti kutatásaim során a debreceni tanárok közül Barra György: A nevelés forradalma és a középiskola (Protestáns Tanügyi Szemle X. 1936. 163 -171) c. cikkében már találkoztam a tesztek értékelésével: „Egy jól megszerkesztett teszt pontos és megbízható statisztika, amellyel a tanár a tanulósereget, no meg önmagát is állandóan ellenőrzés alatt tarthatja." A debreceni Fazekas Gimnáziumban Barra György tanártársával, Dr. Tóth Lajos egyetemi magántanárral együtt próbálta ki fizikából a teszteket a tanulók teljesítményének a mérésére. Barra György az 1940-es évek végén a VKM III. főosztályának a vezetője, miniszteri tanácsos lett. Ekkor javasolta, hogy a teszteket az egyetemi felvételi vizsgánál is alkalmazzák. Nézetével felettesei nem értettek egyet, pl. Horváth Márton szerint: „Az adott társadalmi körülmények között alkalmazott teszteljárás a fizikai dolgozók gyermekeit tartotta volna távol a tanulástól, és a szerzett előjogokat, művelődési kiváltságokat konzerválta volna. (A magyar népi demokrácia története) Barra nézeteit elutasították, a társadalom nem volt még elég érett hozzá."

A mi nemzedékünk számára már nem ismeretlen a teszt, elsősorban a versenyek szintjén használjuk fel, mint a tanulói teljesítmény mérésének praktikus, gyors és hatékony eszközét. Hódi Endre, (OPI osztályvezető) a Nemzetközi Matematikai Diákolimpia magyar csapatának a vezetője révén kerültünk kapcsolatba az USA középiskolai matematikai versenyének; az ún. Evenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsga (AHSME), vagy röviden az amerikai teszt, feladataival. A 30-33. évi (1979-1982) versenyek magyarra fordított változatát levelezőként írták meg az olimpiai szakkörök tagjai (kb. 200-250 fő). Ez egy nagyon jó gyakorlási lehetőség volt a számukra.

Az amerfikai matematikai versenyekről

Az USA-ban 1950-től kezdve rendezik meg a matematikai tanulmányi versenyeket (American Mathematics Competitions), ami ma már nemzeti verseny. Az első 50 évben többször változott a neve, a szerkezete. 1999-ig lényegében az 1. forduló neve AHSME volt. 2000-től szétvált két kategóriára: az AMC → 10-re, ami a legfeljebb 10. osztályos tanulók és az AMC → 12-re, ami a legfeljebb 12. osztályos tanulók versenye, vagyis kezdő és haladó kategóriákra. Ennek oka a verseny célkitűzésében rejlik, mert a fő cél a matematikával való foglalkozás elősegítése, kedvcsinálás, a problémamegoldási készség fejlesztése, nagy tömegek mozgósítása és mindezek biztosítéka a sikeresség. A kiemelkedő képességű, de alacsonyabb osztályba járó (9 -10. osztály) ambiciózus versenyzőt, akinek esélye van a 2. fordulóba való bejutásra, célszerűbb az AMC → 12 kategóriában indítani.

Az AHSME, AMC → 10, AMC → 12 versenyek feladatsorai felelet-választós tesztek. Öt lehetőség (A,B,C,D,E) közül pontosan egy a helyes válasz. A feladatok száma 51 év alatt többször változott, 2000-re pontosan a felére csökkent. 1950-59 között 3 részben 50 feladatot tűztek ki, 15 – 20 – 15 bontásban, 80 perc ki-

dolgozási idővel és részenként 2 pont – 3 pont – 4 pont feladatonkénti pontozással. A 3 rész egyben nehézségi fokot is jelentett (könnyű-közepes-nehéz). Az első részben az alapfogalmak pontos ismerete volt a fontos, a harmadik rész feladatainak megoldása a tanítási órák anyagán túli ismereteket és kreativitást igényelt a pontos és gyors munka mellett. 1960-67 között a feladatok száma 40-re csökkent, 20 – 10 – 10 bontásban, a pontozás is változott, az egyes részek feladatai 3 – 4 – 5 pontosak lettek.

Ezek a versenyek meglehetősen nehéznek bizonyultak, a maximális 150 pontot pl. 1950-ben 1 tanuló, 1952-ben 1 tanuló (azonos az előbbivel), 1959-ben 1 tanuló, 1960-ban 2 tanuló érte el. 1968-73 között 35-re csökkent a feladatok száma és négy részre osztották fel 10 – 10 – 10 – 5 bontásban, a feladatonkénti pontszámok az egyes csoportokban 3 pont – 4 pont – 5 pont – 6 pont, viszont a véletlenszerű kitalálás csökkentésére a rossz válaszokat is beszámítják az összpontszámba a következő képlet alapján: J – 0,25 R (J a jó válaszok száma, R a hibás válaszok száma). 1974-77 között a feladatok száma 30, a kidolgozási idő 90 perc. Az összpontszám kiszámításának képlete: 5J – R (de ez negatív pontszámhoz vezetett), majd 1978-85 között 4J – R + 30, 1986-99 között pedig 5J + 2N, ahol N a meg nem válaszolt feladatok száma (üresen hagyott válaszok). Ekkor már formálisan nem különülnek el az egyes részek, de a nehézségi fok szerinti hármas tagolódás (10 – 10 – 10) itt is megfigyelhető.

A matematikai tesztek megoldása egy bizonyos színvonalú ismeretanyagra támaszkodva, gyors és pontos gondolkodást követel meg. Dönteni kell és nem szabad hibázni. Az újabb pontozási rendszerek bevezetésének az volt a célja, hogy kiszűrje a véletlenszerű találgatásokat. Bizonytalanság esetén a helyes taktika az, ha a kérdést megválaszolatlanul hagyjuk. Tippelni csak akkor érdemes, ha már ráéreztünk a lényegre, sejtjük az eredményt, közel vagyunk a megoldáshoz.

A tanár részéről egyszerű a tesztek javítása, a válaszlapon bejelölt kódok értékelése gépesíthető, így sok dolgozat kijavítása sem okoz problémát.

Az USA-ban a 100 pont feletti teljesítményt tartják kiemelkedőnek, s amelyet az összes versenyzőnek csak kis százaléka tud elérni. Ők azok, akik a további fordulókba bekerülnek. 1972-82 között a Nemzeti Olimpia (USAMO) volt a 2. forduló. 1983-tól csatlakozik az AHSME-hez egy, a jó teljesítményen alapuló 2. forduló, az Évenkénti Meghívásos Matematikai Versenyvizsga (AIME). Az AIME 15 feladatból álló számválaszos teszt, amelynél a válaszokat a 000-999 számok közül a megfelelő 15 szám beírásával adjuk meg. Minden jól megoldott feladat 1 pontot ér. A feladatok kidolgozási ideje 3 óra. Az AIME így egy közbenső állomás az AHSME és az USAMO között. Az USAMO a hagyományos formájú, 5 feladatot tartalmazó vizsga jellegű 3 órás verseny, amelynek példaképe a magyar Kürschák József Matematikai Verseny.

Megállapítható, hogy az AHSME nem kedvezett az okos, de lassú, illetve a gyors, de tévesztő tanulóknak. Az AHSME egy nem standardizált teszt, szemben a SAT-tal. A SAT-ban vannak ún. ekvátorok, vagyis évről – évre visszatérő azonos problémák. Ez azért lehetséges, mert a SAT feladatok egy része nem nyilvános. Az AHSME-nél, az AMC → 10-nél, az AMC → 12-nél, az AIME-nél a feladatok mellett a megoldásokat tartalmazó füzet is megrendelhető, sőt a tanároknak azt javasolják, hogy az előző évek feladatainak a feldolgozása alapján készítsék fel diákjaikat a versenyekre.

A feladatsorok tartalma is megváltozott az évek során. Kezdetben főképpen klasszikus algebrai és geometriai feladatokat tűztek ki, majd trigonometriával, kombinatorikával, számelmélettel, függvényekkel, függvényegyen-letekkel, statisztikával, valószínűségszámítással és alkalmazásokkal bővültek a témakörök.

A segédeszközök használata is változott. 1994-ig nem volt szabad zsebszámológépet

használni. Ma már ugyanazt a kalkulátort használhatják a tanulók, mint a SAT-nál, de képletgyűjtemény használata tilos. Változatlanul megengedett segédeszköz a négyzetrácsos papír, a radír, a körző, a szögmérő és a vonalzó.

Magyar tanulók a 2000. évi AMC és AIME versenyeken

2000-ben az American Mathematics Competitions igazgatójától a DE tehetséggondozó matematika szakköre engedélyt kapott arra, hogy külföldiként 10 – 10 tanulóval az AMC versenyek hivatalos időpontjában, levelező úton részt vehessen a 2000. évi AMC → 10 és AMC → 12 versenyeken, illetve a továbbjutás feltételeit teljesítő tanulók meghívást kapnak az AIME-n – szintén levelező úton – való részvételre. Mivel az USAMO nemzeti verseny, ezért számunkra az AIME-n való részvétellel zárult az AMC-n való részvétel. Az AMC-n induló tanulók előzetesen válogató szoktató versenyeken vettek részt. Az AMC → 12 kategóriából mind a 10 tanuló továbbjutott az AIME-be, míg az AMC → 10 kategóriában induló 10 tanuló közül 7 teljesítette a továbbjutás feltételeit. A legjobb diákunk, aki 9. osztályos volt, az AMC → 12-n a külföldiek között a 4. helyet szerezte meg, míg az AIME-n 12 pontot ért el, amivel a külföldiek között a 3. helyen végzett.

Az AMC → 10 és az AMC → 12 is 25 – 25 tesztfeladatból áll, az A, B, C, D, E választási lehetőségekkel. A kidolgozási idő: 75 perc. A két feladatsorban 13 feladat volt a közös. A pontozás ismét változott, de úgy, hogy a maximális pontszám 150 maradt. Az összpontszám kiszámítási képlete: 6J+2N.

A 2000. évi AMC és AIME versenyek feladatai és kódjai

A 2000. évi AMC → 10 feladatai

1. 2001-ben az USA-ban rendezik meg a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát (IMO). Legyenek I, M, O olyan különböző pozitív egészek, amelyek szorzata: $I \cdot M \cdot O = 2001$. Mi az $I + M + O$ összeg lehetséges legnagyobb értéke?

(A) 23 (B) 55 (C) 99 (D) 111 (E) 671

2. $2000(2000^{2000}) =$

(A) 2000^{2001} (B) 4000^{2000} (C) 2000^{4000}

(D) $4\,000\,000^{2000}$ (E) $2000^{4000\,000}$

3. Jenny minden nap megette egy befőttes üvegből az előző napról megmaradt cseresznyék 20%-át. A második nap végén 32 cseresznye volt az üvegben. Mennyi cseresznye volt eredetileg az üvegben?

(A) 40 (B) 50 (C) 55 (D) 60 (E) 75

4. Sára egy internetszolgáltatónak havi alapdíjat és ezen felül a használat után óradíjat is fizet. A decemberi számla 12, 48 $, a januári pedig 17, 54 $ volt, mert januárban kétszer annyi ideig internetezett, mint decemberben. Mennyi a havi alapdíj?

(A) 2,53 $ (B) 5,06 $ (C) 6,24 $
(D) 7,42 $ (E) 8,77 $

5. Az M illetve N pontok a PAB háromszög PA illetve PB oldalának a felező pontjai. A P pont egy AB-vel párhuzamos egyenesen mozog. Az alább felsorolt mennyiségek közül hány változik?

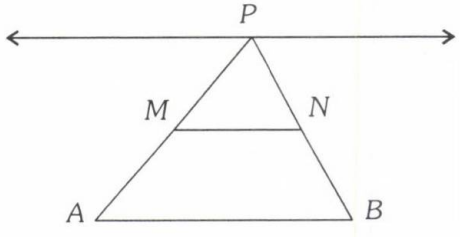
a) Az MN szakasz hossza.

b) A PAB háromszög kerülete.

c) A PAB háromszög területe.

d) Az $ABNM$ trapéz területe.

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

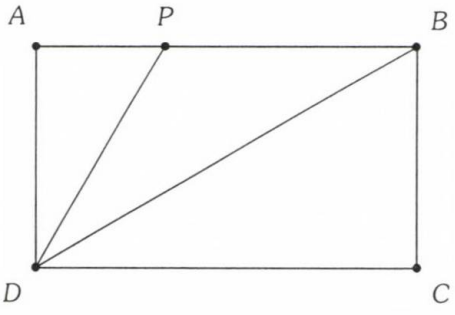


6. Az 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . Fibonacci-sorozat első két tagja egyenlő eggyel, minden további tagja a megelőző két tag összege. A tíz

számjegy közül melyik az, amelyik utolsóként jelenik meg az egyesek helyiértékén a Fibonacci-sorozatban?

(A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 9

7. Egy $ABCD$ téglalapban $AD = 1$, P az AB szakaszon van és DB, DP harmadolják az $ADC\sphericalangle$ szöget. Mennyi a BPD háromszög kerülete?



(A) $3+\frac{\sqrt{3}}{3}$ (B) $2+\frac{4\sqrt{3}}{3}$ (C) $2+2\sqrt{2}$

(D) $\frac{3+3\sqrt{5}}{2}$ (E) $2+\frac{5\sqrt{3}}{3}$

8. Az Olimpia Gimnáziumban az első évesek 2/5, a másodévesek 4/5 része megírta az AMC $\rightarrow$ 10 tesztet. Feltételezve, hogy az első éves és a másodéves versenyzők létszáma egyenlő, melyik állítás helyes az alábbiak közül?

(A) A másodéves diákok száma ötszöröse az első évesek számának.

(B) A másodéves diákok száma kétszerese az első évesek számának.

(C) A másodéves és az első éves diákok száma egyenlő.

(D) Az első éves diákok száma kétszerese a másodévesek számának.

(B) Az első éves diákok száma ötszöröse a másodévesek számának.

9. Ha $|x-2| = p$ és $x < 2$, akkor $x - p =$

(A) -2 (B) 2 (C) $2-2p$ (D) $2p-2$ (E) $|2p-2|$

10. Egy (pozitív területű) háromszög oldalainak hossza 4, 6 és x. Egy másik, ugyancsak pozitív területű háromszög oldalai pedig 4, 6 és y. Mi a legkisebb olyan pozitív szám, ami nem lehet $|x-y|$ értéke?

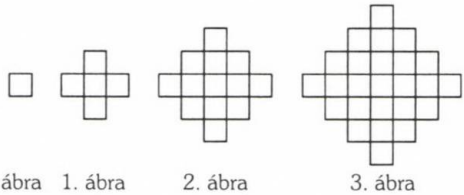
(A) 2 (B) 4 (C) 6 (D) 8 (E) 10

11. Kiválasztottunk 4 és 18 között két különböző prímszámot. Szorzatukból az összegüket kivonva az alábbi számok közül melyiket kaphatjuk meg?

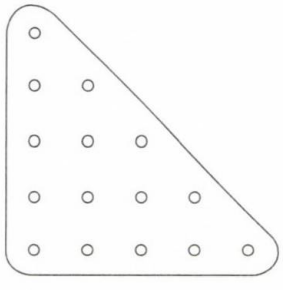
(A) 21 (B) 60 (C) 119 (D) 180 (E) 231

12. Az alábbi 0., 1., 2. és 3. sorszámú ábrák 1, 5, 13 és 2~ egymást nem fedő négyzetből állnak. Ha a mintázatot ismételve az ábrák készítését folytatjuk, akkor hány négyzetből áll a 100. ábra?

(A) 10401 (B) 19801 (C) 20201 (D) 39801 (E) 40801



13. 5 sárga, 4 piros, 3 zöld, 2 kék és 1 narancssárga pettyet egy háromszög alakú táblázatban rendezünk el. Hány olyan elrendezés van, amelynél semelyik sorban és oszlopban sem fordul elő két egyforma színű petty?



(A) 0 (B) 1 (C) 5!4!3!2!1!

(D) $\frac{15!}{5!4!3!2!1!}$ (E) 15!

14. Walterné öt diákot vizsgáztatott matematikából. A diákoknak a vizsgán elért pontszámait egy gépbe véletlenszerűen beütötte, és az azonnal kiírta az addig beütött pontszámok átlagát. Az átlag mindig egész szám volt. A pontszámok növekvő sorrendben 71, 76, 80, 82, 91 voltak. Mi volt az utoljára beütött pontszám?

(A) 71 (B) 76 (C) 80 (D) 82 (E) 91

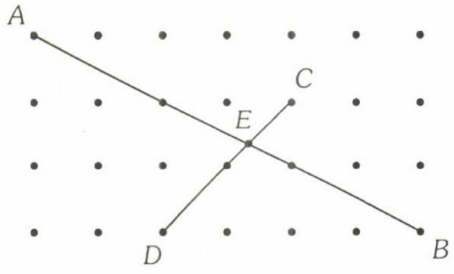
15. A nullától különböző a és b valós számokra $ab = a - b$. Az

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} - ab$$

értéke lehet

(A) -2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 2

16. Az ábra egy négyzétrács 28 pontját mutatja, ahol a szomszédos pontok távolsága 1. Az AB szakasz a CD szakaszt E-ben metszi. Határozza meg az AE szakasz hosszát.



(A) $\frac{4\sqrt{5}}{3}$ (B) $\frac{5\sqrt{5}}{3}$ (C) $\frac{12\sqrt{5}}{7}$

(D) $2\sqrt{5}$ (E) $\frac{5\sqrt{65}}{9}$

17. Borisznek van egy csodálatos pénzváltó automatája. Ha bedob egy ne-gyeddollárost (ami 25 centet ér), kap 5 darab 5 centest; ha bedob egy 5 centest, kap 5 darab egycentest; ha pedig bedob egy egycentest, kap 5 darab negyeddollárost. Borisznek van egy egycentese. A pénzváltógép ismételt használatával az alábbi összegek közül melyikhez juthat el Borisz?

(A) 3,63 $ (B) 5,13 $ (C) 6,30 $ (D) 7,45 $

(E) 9, 07 $

18. Sarolta egy 5 km oldalhosszúságú négyzet alakú úton teljesen végigsétál. Az út minden pontjából minden irányban vízszintesen pontosan 1 km-re lát el. Mekkora annak az alakzatnak a területe négyzetkilométerekben, egész számra kerekítve, amelyet Sarolta a sétája során láthatott?

(A) 24 (B) 27 (C) 39 (D) 40 (E) 42

19. Egy derékszögű háromszög átfogóján levő pontból a befogókkal párhuzamosan húzott egyenesekkel a háromszöget egy négyzetre és két kisebb derékszögű háromszögre bontjuk. Az egyik kis háromszög területe a négyzet területének m-szerese. Ekkor a másik kis háromszög területének és a négyzet területének aránya

(A) $\frac{1}{2m+1}$ (B) m (C) $1 - m$ (D) $\frac{1}{4m}$ (E) $\frac{1}{8m^2}$

20. Legyenek A, M, C olyan nemnegatív egészek, hogy $A + M + C = 10$. Mennyi az $A \cdot M \cdot C + A \cdot M + M \cdot C + C \cdot A$ kifejezés maximuma

(A) 49 (B) 59 (C) 69 (D) 79 (E) 89

21. Ha minden aligátor kegyetlen vadállat és vannak alattomos aligátorok, akkor az alábbi állítások közül melyek biztosan igazak?

I. Minden aligátor alattomos.

II. Vannak olyan kegyetlen vadállatok, amelyek alattomosak.

III. Vannak olyan aligátorok, amelyek nem alattomosak.

(A) csak I. (B) csak II. (C) csak III.

(D) csak II. és III. (E) egyik sem

22. Egy reggelen Angéla családjának minden tagja 8 unciányi kávé – tej keveréket ivott meg. A kávé és tej mennyisége csészéről csészére más és más volt, de sohasem nulla. Angéla az összes tej negyedét és az összes kávé hatod részét itta meg. Hány tagú a család?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

23. Ha a 10, 2, 5, 2, 4, 2, x számok számtani középértékét, mediánját (páratlan számból álló szám n-es mediánja nagyság szerinti sorba rendezés után a középső elem) és móduszát (egy szám n-esben a legtöbbször előforduló számot a szám n-es móduszának nevezzük) növekvő sorrendbe rendezzük, akkor ezek a számok egy nemkonstans számtani sorozat egymás után következő tagjai. Mennyi az összes ilyen x valós szám összege?

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 17 (E) 20

24. Legyen f olyan függvény, hogy

$$f\left(\frac{x}{3}\right) = x^2 + x + 1.$$

Határozzuk meg az összes olyan z szám összegét, amelyre $f(3z) = 7$.

(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) 0 (D) $\frac{5}{9}$ (E) $\frac{5}{3}$

25. Az N évben a 300. nap keddre esik. Az $N + 1$ évben a 200. nap szintén keddre esik. Ekkor az $N - 1$ évben a 100. nap

(A) csütörtök (B) péntek (C) szombat

(D) vasárnap (E) hétfő

A 2000. évi AMC → 12 feladatai

1. 2001-ben az USA-ban rendezik meg a Nemzetközi Matematikai Diákolimpiát (IMO). Legyenek I, M, O olyan különböző pozitív egészek, amelyek szorzata: $I \cdot M \cdot O = 2001$. Mi az $I + M + O$ összeg lehetséges legnagyobb értéke?

(A) 23 (B) 55 (C) 99 (D) 111 (E) 671

2. $2000(2000^{2000}) =$

(A) 2000^{2001} (B) 4000^{2000} (C) 2000^{4000}

(D) $4\,000\,000^{2000}$ (E) $2000^{4\,000\,000}$

3. Jenny minden nap megette egy befőttes üvegből az előző napról megmaradt cseresznyék 20%-át. A második nap végén 32 cseresznye volt üvegben. Mennyi cseresznye volt eredetileg az üvegben?

(A) 40 (B) 50 (C) 55 (D) 60 (E) 75

4. Az 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, . . . Fibonacci-sorozat első két tagja egyenlő eggyel, minden további tagja a megelőző két tag összege. A tíz számjegy közül melyik az, amelyik utolsóként jelenik meg az egyesek helyiértékén a Fibonacci-sorozatban?

(A) 0 (B) 4 (C) 6 (D) 7 (E) 9

5. Ha $|x - 2| = p$ és $x < 2$, akkor $x - p =$

(A) -2 (B) 2 (C) $2 - 2p$ (D) $2p - 2$

(E) $|2p - 2|$

6. Kiválasztottunk 4 és 18 között két különböző prímszámot. Szorzatukból az összegüket kivonva az alábbi számok közül melyiket kaphatjuk meg?

(A) 21 (B) 60 (C) 119 (D) 180 (E) 231

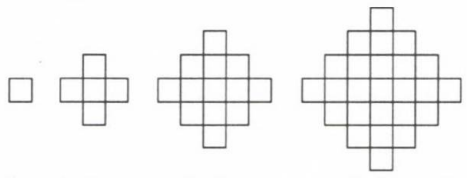
7. Hány olyan b pozitív egész szám van, hogy $\log_b 729$ pozitív egész szám?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

8. Az alábbi 0.,1., 2. és 3. sorszámú ábrák 1, 5,13 és 25 egymást nem fedő négyzetből állnak. Ha a mintázatot ismételve az ábrák készítését folytatjuk, akkor hány négyzetből áll a 100. ábra?

(A) 10401 (B) 19801 (C) 20201 (D) 39801

(E) 40801



0. ábra 1. ábra 2. ábra 3. ábra

9. Walterné öt diákot vizsgáztatott matematikából. A diákoknak a vizsgán elért pontszámait egy gépbe véletlenszerűen beütötte, és az azonnal kiírta az addig beütött pontszámok átlagát. Az átlag mindig egész szám volt. A pontszámok növekvő sorrendben 71, 76, 80, 82, 91 voltak. Mi volt az utoljára beütött pontszám?

(A) 71 (B) 76 (C) 80 (D) 82 (E) 91

10. A P(1; 2; 3) pontot az xy síkra tükrözzük, az így nyert Q pontot 180°-kal elforgatjuk az x tengely körül. Végül az így kapott R pontot az y tengellyel párhuzamosan 5 egységgel (pozitív irányban) eltolva az S ponthoz jutunk. Az S pont koordinátái

(A) (1; 7; – 3) (B) (–1; 7; -3) (C) (–1; – 2; 8)

(D) (– 1; 3; 3) (E) (1; 3; 3)

11. A nullától különböző a és b valós számokra $ab = a - b$. Az

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}-ab$$

értéke lehet

(A) – 2 (B) $-\frac{1}{2}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 2

12. Legyenek A, M, C olyan nemnegatív egészek, hogy $A + M + C = 12$. Mennyi az $A \cdot M \cdot C + A \cdot M + M \cdot C + C \cdot A$ kifejezés maximuma

(A) 62 (B) 72 (C) 92 (D) 102 (E) 112

13. Egy reggelen Angéla családjának minden tagja 8 unciányi kávé – tej keveréket ivott meg. A kávé és tej mennyisége csészéről csészére más és más volt, de sohasem nulla. Angéla az összes tej negyedét és az összes kávé hatod részét itta meg. Hány tagú a család?

(A) 3 (B) 4 (C) 5 (D) 6 (E) 7

14. Ha a 10, 2, 5, 2, 4, 2, x számok számtani középértékét, mediánját (páratlan számból álló szám n-es mediánja nagyság szerinti sorba rendezés után a középső elem) és móduszát (egy szám n-esben a legtöbbször előforduló számot a szám n-es móduszának nevezzük) növekvő sorrendbe rendezzük, akkor ezek a számok egy nemkonstans számtani sorozat egymás után következő tagjai. Mennyi az összes ilyen valós x szám összege?

(A) 3 (B) 6 (C) 9 (D) 17 (E) 20

24. Legyen f olyan függvény, hogy

$$f\left(\frac{x}{3}\right)=x^2+x+1.$$

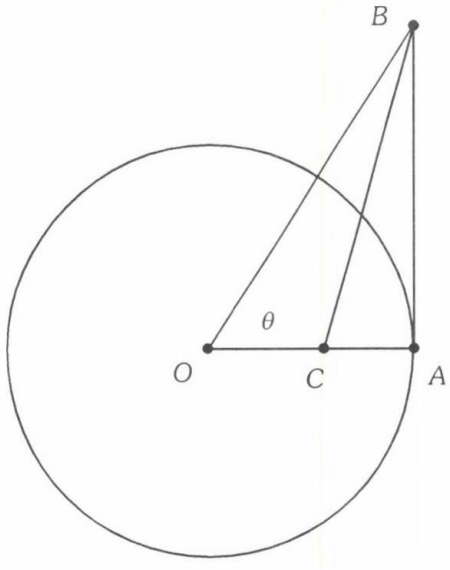
Határozzuk meg az összes olyan z szám összegét, amelyre $f(3z) = 7$.

(A) $-\frac{1}{3}$ (B) $-\frac{1}{9}$ (C) 0 (D) $\frac{5}{9}$ (E) $\frac{5}{3}$

16. Egy 13 sorból és 17 oszlopból álló négyzethálós táblázat minden négyzetébe a bal felső négyzetből kiindulva beírjuk 1-gyel kezdve sorban a természetes számokat. Az első sor számai: 1, 2, 3, . . . ,17, a második soré: 18, 19, 20, . . . , 34, stb., lefelé a táblázatban. Ha a táblázatot átszámozzuk úgy, hogy a bal oldali első oszlop számai fentről kezdve: 1, 2, 3, . . . ,13, a második oszlopé: 14, 15, 16, . . . , 26, stb. a táblázatban, akkor néhány négyzetben ugyanaz a szám áll a két beírási rendszerben. Az ilyen számok összege (csak az egyik rendszerben)

(A) 222 (B) 333 (C) 444 (D) 555 (E) 666

17. Legyen az O pont körüli egység sugarú kör egy pontja A, AB a kör érintője és $AOB\sphericalangle = \theta$. Ha a C pont az OA szakaszon fekszik és BC felezi az $ABO\sphericalangle$ szöget, akkor $OC=$



(A) $\frac{1}{\cos^2\theta}-\operatorname{tg}\theta$ (B) $\frac{1}{2}$ (C) $\frac{\cos^2\theta}{1+\sin\theta}$

(D) $\frac{1}{1+\sin\theta}$ (E) $\frac{\sin\theta}{\cos^2\theta}$

18. Az N évben a 300. nap keddre esik. Az $N + 1$ évben a 200. nap szintén keddre esik. Ekkor az $N - 1$ évben a 100. nap

(A) csütörtök (B) péntek (C) szombat

(D) vasárnap (E) hétfő

19. Az ABC háromszögben $AB = 13$, $BC = 14$, $AC = 15$. Jelölje D a BC szakasz felezőpontját és E a BC szakasznak a $BAC\sphericalangle$ szögfelezőjével való metszéspontját. Az alábbi számok közül melyik közelíti legjobban az ADE háromszög területét?

(A) 2 (B) 2,5 (C) 3 (D) 3,5 (E) 4

20. Ha x, y, z olyan pozitív számok, hogy

$$x+\frac{1}{y}=4,\quad y+\frac{1}{z}=1,\quad z+\frac{1}{x}=\frac{7}{3},$$

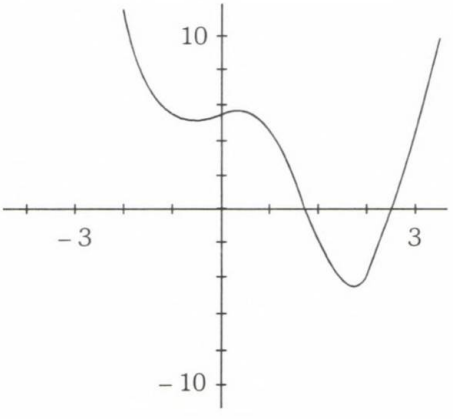
akkor x, y, z =

(A) 3 (B) 1 (C) 3 (D) 2 (E) 3

21. Egy derékszögű háromszög átfogóján levő pontból a befogókkal párhuzamosan húzott egyenesekkel a háromszöget egy négyzetre és két kisebb derékszögű háromszögre bontjuk. Az egyik kis háromszög területe a négyzet területének m-szerese. Ekkor a másik kis háromszög területének és a négyzet területének aránya

(A) $\frac{1}{2m+1}$ (B) m (C) $1-m$ (D) $\frac{1}{4m}$ (E) $\frac{1}{8m^2}$

22. A mellékelt görbe a $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d$ alakú negyedfokú polinom gráfjának egy darabja.



Az alábbiak közül melyik a legkisebb?

(A) P(-1)

(B) P zérushelyeinek szorzata

(C) P nem valós zérushelyeinek szorzata

(D) P együtthatóinak összege

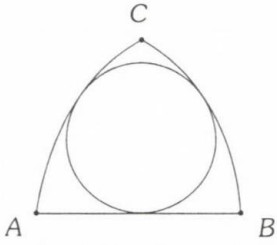
(E) P valós zérushelyeinek összege

23. Hazárd Professzor egy olyan lottószelvényt vásárolt, amelyen 1 és 46 közötti egész számokból (ezeket is beleértve) 6 különbözőt kell kiválasztani. A számokat úgy választja ki, hogy azok 10-es alapú logaritmusainak az összege egész szám. A nyerő szelvény is ilyen tulajdonságú. Annak a valószínűsége, hogy Hazárd Professzornak nyerő szelvénye van

(A) $\frac{1}{5}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{3}$ (D) $\frac{1}{2}$ (E) 1

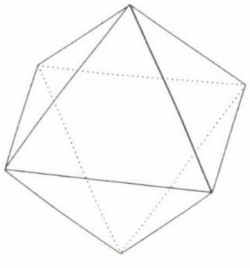
24. Legyen az $\overset{\frown}{AC}$ és $\overset{\frown}{BC}$ körívek középpontja B illetve A, a $\overset{\frown}{BC}$ körív hossza 12. Az $\overset{\frown}{AC}$ és $\overset{\frown}{BC}$ íveket továbbá az AB szakaszt érintő kör kerülete

(A) 24 (B) 25 (C) 26 (D) 27 (E) 28



25. Nyolc egybevágó szabályos háromszöglapból, amelyeknek mindegyike különböző színű, egy szabályos oktaédert készítünk. Hány lényegesen különböző oktaéder készíthető? (Két színes oktaédert lényegesen különbözőnek tekintünk, ha mozgással egymásba nem vihetők át.)

(A) 210 (B) 560 (C) 840 (D) 1260 (E) 1680



Csete Lajos

Egy Makowski-féle egyenlőtlenségről

Egy KöMal feladat élesítése

A KöMaL 2001/1. számában tűzték ki Tőricht Pál és Árokszállási Tibor (Paks) tanár urak a B. 3428. problémát.

Bizonyítsuk be, hogy tetszőleges háromszögben érvényes az alábbi összefüggés:

$$\frac{r \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c}{R^4} \le \frac{27}{16} \qquad (1)$$

(R a háromszög köré írt, r a háromszögbe írt, r_a, r_b, r_c pedig a hozzá írt körök sugarát jelentik.)

Míg a KöMaL 2001/6. számában a 355-357. oldalakon két megoldást olvashatunk e problémára.

Nemrég böngésztem egy érdekes könyvet a geometriai egyenlőtlenségekről [1], amelyben rábukkantam a következő problémára, amely megoldás nélkül szerepel a könyvben:

Ha $G(x, y, z)$ jelöli az x, y, z mértani közepét akkor

$$G\left(r, r, \frac{R}{2}\right) \le \frac{1}{3} \cdot G(r_a, r_b, r_c) \le G\left(r, \frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right) \qquad (2)$$

ahol egyenlőség akkor és csakis akkor van, ha a háromszög egyenlő oldalú.

E problémát Andrzej Makowski (Varsói Egyetem) vizsgálta 1964-ben egy holland folyóiratban [2]. (A. Makowski a lengyel matematikai olimpiai csapat vezetőjeként is működött.)

Nézzük, hogy milyen kapcsolatban van e Makowski-féle probléma a B.3428. feladattal.

Átrendezva az (1) egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$r_a \cdot r_b \cdot r_c \le \frac{27}{16} \cdot \frac{R^4}{r}$$

Ebből

$$\sqrt[3]{r_a \cdot r_b \cdot r_c} \le 3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{16} \cdot \frac{R^4}{r}}$$

vagyis

$$\frac{1}{3} \cdot G(r_a \cdot r_b \cdot r_c) \le \sqrt[3]{\frac{1}{16} \cdot \frac{R^4}{r}} \qquad (3)$$

Felmerül a kérdés, hogy a (3) egyenlőtlenség élesebb-e vagy a (2) egyenlőtlenség idevágó második része. Induljunk ki a következő feltevésből:

$$\sqrt[3]{\frac{1}{16} \cdot \frac{R^4}{r}} \le G\left(r, \frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right)$$

vagyis

$$\sqrt[3]{\frac{1}{16} \cdot \frac{R^4}{r}} \le \sqrt[3]{r \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2}}$$

ebből

$$R^2 \le 4 \cdot r^2$$

tehát $R \le 2 \cdot r$. Ennek, mint ahogyan tanultuk, pontosan a fordítottja igaz, ugyanis minden háromszögre fennáll a nagyon ismert és fontos $R \le 2 \cdot r$ egyenlőtlenség, amelynek számos bizonyítása ismert. A legegyszerűbb bizonyítása Ádám Istvántól származik [3].

Így nem volt igaz a föltevésünk, tehát helyette

$$G\left(r, \frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right) \le \sqrt[3]{\frac{1}{16} \cdot \frac{R^4}{r}}$$

teljesül, ahol egyenlőség akkor és csak akkor van ha $R = 2 \cdot r$, ez pedig, mint tudjuk, pontosan az egyenlő oldalú háromszög esetén áll fenn.

Vagyis a (2) Makowski-féle egyenlőtlenség második része élesítése a KöMaL B. 3428. feladatának.

A B. 3428. feladat kiegészítése

Most megnézzük, hogy a (2) egyenlőtlenség első része milyen becslést ad alulról a B. 3428. egyenlőtlenség bal oldalán lévő szorzatra.

$$G\left(r,r,\frac{R}{2}\right)\le\frac{1}{3}\cdot G(r_a,r_b,r_c)$$

vagyis

$$\sqrt[3]{r\cdot r\cdot\frac{R}{2}}\le\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{r_a\cdot r_b\cdot r_c}$$

ebből

$$\frac{r^2\cdot R}{2}\le\frac{1}{27}\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c$$

azaz

$$\frac{27}{2}\cdot\frac{r^3}{R^3}\le\frac{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}{R^4}$$

ez ekvivalens a (2) Makowski-féle egyenlőtlenség első részével.

Az előbb nem adtuk meg a szorzatra a felső becslést konkrétan, ezt könnyen felírhatjuk.

$$\frac{1}{3}\cdot G(r_a,r_b,r_c)\le G\left(r,\frac{R}{2},\frac{R}{2}\right)$$

vagyis

$$\frac{1}{3}\cdot\sqrt[3]{r_a\cdot r_b\cdot r_c}\le\sqrt[3]{r\cdot\frac{R}{2}\cdot\frac{R}{2}}$$

Ebből

$$\frac{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}{R}\le\frac{27}{4}\cdot\frac{r^2}{R^2}$$

Összefoglalva

$$\frac{27}{2}\cdot\frac{r^3}{R^3}\le\frac{r\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c}{R^4}\le\frac{27}{4}\cdot\frac{r^2}{R^2}\le\frac{27}{16},\quad(4)$$

Ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a háromszög egyenlő oldalú.

A Makowski-féle egyenlőtlenség első részének igazolása

Persze az előbbi élesítés és kiegészítés csak akkor igaz, ha a Makowski-féle egyenlőtlenség tényleg fennáll. A következőkben Makowski [2] cikkétől eltérő módon igazoljuk tételét. Ismert, hogy

$$r+4\cdot R=r_a+r_b+r_c\quad(5)$$

(Lásd például [4], 270-271. oldal, [5], 34. oldal 312. feladat és 130. oldal, [6])
Másrészt

$$r_a=\frac{r\cdot s}{s-a},\quad(6)$$

ahol s a háromszög félkerülete, vagyis

$$s=\frac{a+b+c}{2}.$$

(Lásd például [5] 268. oldal, vagy idevágó még a KöMaL 2000/9. számának 532-533. oldalai.)

Először igazoljuk a (2) egyenlőtlenség első részét, vagyis hogy

$$G\left(r,r,\frac{R}{2}\right)\le\frac{1}{3}\cdot G(r_a,r_b,r_c)$$

Ezen egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy

$$f1:=\frac{1}{27}\cdot r_a\cdot r_b\cdot r_c-\frac{r^2\cdot R}{2}\ge 0\quad(7)$$

fennáll.

Fejezzük ki (5)-ből R-et, majd helyettesítsük be ezt (7)-be, ezután (6) alapján helyettesítsük be az így kapott egyenlőtlenségbe az r_a, r_b, r_c képleteit. Majd helyettesítsük be az s kifejezést, ezután egyszerűsítsünk és kapjuk például, hogy

$$f1:=\frac{1}{27}\cdot r^3\cdot\frac{(a^3+3a^2b+3a^2c+3ab^2-21\cdot abc+3ac^2+b^3+3b^2c+3bc^2+c^3}{(a-b+c)(a+b-c)}\ge 0\quad(8)$$

Bevallom, hogy ezt nem puszta kézzel végeztem, hanem Maple V Release 4 Student számítógép-algebrai programmal.

Osszuk el a (8) egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív r^3-nal, szorozzuk 27-tel, majd vegyük figyelembe, hogy a háromszög-egyenlőtlenség szerint $a - b - c < 0$, $a - b + c > 0$ és $a + b - c > 0$ ezeket felhasználva kapjuk, hogy elég bizonyítani a következő egyenlőtlenséget: (9)

$$f2 := a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 - 21 \cdot abc + \\ + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 \geq 0$$

Alkalmazzuk a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget először az a^3, b^3, c^3 pozitív számokra:

$$\frac{a^3 + b^3 + c^3}{3} \geq \sqrt[3]{a^3b^3c^3}$$

Ebből kapjuk, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 > 3abc, \qquad (10)$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a = b = c$.

Alkalmazzuk most a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget a következő hat pozitív számra:

$$\frac{3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2}{6} \geq \\ \geq \sqrt[6]{(3a^2b)(3a^2c)(3ab^2)(3ac^2)(3b^2c)(3bc^2)}$$

Ebből kapjuk, hogy

$$3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + \\ + 3b^2c + 3bc^2 > 18 \cdot abc, \qquad (11)$$

ahol egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $a = b = c$.

A kapott (10) és (11) egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk, hogy

$$a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + \\ + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 \geq 21 \cdot abc$$

Ez pedig éppen a bizonyítandó (9) egyenlőtlenség átrendezett alakja Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha a háromszög egyenlő oldalú. Ezzel igazoltuk a (2) Makowski-féle egyenlőtlenség első részét.

A Makowski-féle egyenlőtlenség második részének az igazolása

Azt kell igazolnunk, hogy

$$\frac{1}{3} \cdot G(r_a, r_b, r_c) \leq G\left(r, \frac{R}{2}, \frac{R}{2}\right)$$

Ezen egyenlőtlenség ekvivalens avval, ha kimutatjuk, hogy

$$f3 := r \cdot \frac{R}{2} \cdot \frac{R}{2} - \frac{1}{27} \cdot r_a \cdot r_b \cdot r_c \geq 0 \qquad (12)$$

Ezen egyenlőtlenségen éppúgy elvégeztettem a számítógéppel a behelyettesítéseket és egyszerűsítéseket, mint ahogy az egyenlőtlenség első részénél leírtam. Sajnálatos módon sokkal bonyolultabb formula állt elő, amely annyira megijesztett, hogy komolyan nem is próbáltam bebizonyítani ennek a nemnegativitását.

Még néhány dolgot kipróbáltam, de sorra kudarcot vallottam, és ekkor végül alkalmaztam a lépcső-transzformációt. [9]

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $a \geq b \geq c$, hiszen a bizonyítandó egyenlőtlenség a, b, c-re szimmetrikus. (Ezt behelyettesítés után láthatjuk is.)

Miután (12)-be behelyettesítettük az R, r_a, r_b, r_c és az s előbb leírt képleteit, ezután a kapott képletben r és a, b, c különböző hatványai hemzsegnek.

Most jön a lépcső-transzformáció. Végezzük el a következő helyettesítéseket:

$$a = b + x \text{ és } b = c + y.$$

Mivel feltevésünk szerint $a \geq b \geq c$, ezért $x \geq 0$ és $y \geq 0$. Egyszerűsítsük és rendezzük a kapott képletet, például a következőt kapjuk:

$$f3 := \frac{1}{27} \cdot r^3 \cdot (102 \cdot c^3yx^2 + 42 \cdot c^3y^2x + 18 \cdot c^4yx + \\ + 147 \cdot c^2y^2x^2 + 22 \cdot c^2y^3x + 18 \cdot c^4x^2 + 28 \cdot c^3y^3 + \\ + 18 \cdot c^4y^2 + 11 \cdot c^2y^4 + 10 \cdot x^5c + 35 \cdot x^4c^2 + 44 \cdot x^3c^3 +$$

$$+8\cdot x^5y+24\cdot x^4y^2+32\cdot y^3x^3+x^6+60\cdot x^4cy+$$
$$+136\cdot x^3c^2y+120\cdot y^2x^3c+80\cdot y^3x^2c+16\cdot y^4x^2)\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{(x-c)^2(x+c)^2(x+2y+c)^2}$$

Remélem, hogy nem túl sok sajtóhiba lesz e képletben a gépelések után. Mindenesetre az a lényeg, hogy itt minden tag és minden tényező nemnegatív. Ugyebár ez azt jelenti, hogy $f3 \geq 0$. Itt egyenlőség akkor és csak akkor van, ha $x = y = 0$, azaz $a = b = c$.

Ezzel igazoltuk a (12) egyenlőtlenséget és ezzel a (2) Makowski-féle egyenlőtlenség második felét is. Tehát valóban igaz a B. 3428. feladat élesítése.

Egy, a Polygon folyóiratnak elküldött cikkben [7] egyebek mellett leírom az egyenlőtlenség egyik irányának további élesítését bizonyítással.
Mégpedig

$$\frac{1}{3}\cdot G(r_a,r_b,r_c)\leq\frac{1}{3}\sqrt[3]{r\cdot(4\cdot R^2+4\cdot Rr+3\cdot r^2)}\leq$$
$$\leq G\left(r,\frac{R}{2},\frac{R}{2}\right)=\sqrt[3]{\frac{R^2\cdot r}{4}}$$

Az itt felhasznált

$$r_a,\ r_b,\ r_c \leq r\cdot(4\cdot R^2+4\cdot Rr+3\cdot r^2)$$

egyenlőséget a [8] könyv 43. oldalán olvastam bizonyítás nélkül. A [7] cikkben szintén a lépcső-transzformációval szerepel az előbbi élesítés igazolása.

Habár a számítógépet és a Maple programot alkalmaztam a formulák kezelésére, semmi elvi akadálya annak, hogy Olvasóink egy halom papírral és némi idő ráfordításával ellenőrizzék az előző eredményeket. De azért javaslom a gyorsítás kedvéért az előbb leírt módszereket. Másrészt próbáljuk ki a lépcső-transzformációt a Makowski-féle egyenlőtlenség első felének igazolására is. A tapasztalatom szerint ennek sikerülnie kell.

Ugyanakkor javaslom, hogy Olvasóink próbálkozzanak meg más úton, a Makowski-féle egyenlőtlenség kézi levezetésével.

Irodalom

[1] Bottema, O. – R. Z. Djordjevic – R. R. Janic – D. S. Mitrinovic – P. M. Vasic, Geometric Inequalities, Wolters-Noordhoff Publishing, Groningen, 1969.

[2] Makowski Andrzej, Inqualities for Radii of Inscribed, Circumscribed and Escribed Circles, Nieuw Archief voor Wiskunde (3), 12 (1964), 5-7.

[3] Reiman István, A geometria és határterületei, Gondolat, Budapest, 1986. 227-228. oldal

[4] Skljarszkij, D. O. – N. N. Csencov – I. M. Jaglom, Válogatott feladatok és tételek az elemi matematika köréből 2/2. Geometriai egyenlőtlenségek és szélsőérték-feladatok, Tankönyvkiadó, Budapest, 1973. (Fordította: Vargha András)

[5] Tolnai Jenő (összeállító), Érdekes matematikai gyakorló feladatok II. Geometria, Tankönyvkiadó, Budapest, 1971.

[6] KöMaL, 1898. november, 52. oldal, 503. feladat (21-en küldtek be megoldást és Perl Gyula megoldását közölték)

[7] Csete Lajos, A háromszög hozzáírt körei sugarainak számtani-, mértani-, harmonikus-, négyzetes- és k-adik hatványközepeiről, Polygon, (a cikk elküldve)

[8] Szoltán, V. P. – Sz. I. Mejdman, Tozsdesztva i nyeravenstva v treugolnyike, Stiinca, Kisinyev, 1982.

[9] Csete Lajos, Egyenlőtlenségek bizonyítására szolgáló módszerek, A Matematika Tanítása, 2002/2. (március), 10-19. oldal, különösen a 10-12. oldal

Köszönöm szépen dr. Pintér Lajos tanár úrnak (Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete), hogy kölcsönözte a [8] könyvet.
Köszönöm szépen Varga Ferencné könyvtárvezetőnek (Szegedi Tudományegyetem Bolyai Intézete), hogy kölcsönözte az [1] és [2] műveket.

Ábrahám Kinga – Csorba Ferenc

Megjegyzések a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenségek alkalmazásához

Az egyik megyei matematikai versenyünk (Sopron, 1994) döntőjére szántuk a következő feladatot: *x mely nem negatív értékeire lesz a* $K=(1-x)^9(1+x)(1+2x)^4$ *szorzat értéke a legnagyobb és mekkora a maximális értéke?* (Szinte biztos, hogy loptuk a feladatot, talán [1]-ből.)

A megoldás vázlata a következő: alakítsuk egy kicsit a K kifejezést!

$$K = (1-x)^9(1+x)(1+2x)^4 =$$
$$= (1-x)^8(1-x)(1+x)(1+2x)^4 =$$
$$= (1-x)^8(1-x^2)(1+2x)^4.$$

Mivel az első és a harmadik tényező nem negatív, így ha $|x| \geq 1$, akkor a kifejezés nem pozitív. Ez azt jelenti, hogy -1 és 1 között lesz az a hely, ahol K-nak maximuma van. Mivel x nem negatív, elegendő a $0 \leq x < 1$ esetet vizsgálni. Alkalmazzuk a pozitív $(1-x)$, $(1+x)$, $(1+2x)$ számokra a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[14]{K} = \sqrt[14]{(1-x)^9(1+x)(1+2x)^4} \leq$$
$$\leq \frac{9(1-x)+(1+x)+4(1+2x)}{14} = 1,$$

azaz $K \leq 1$. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $(1-x) = (1+x) = (1+2x)$, vagyis $x = 0$, ekkor $K = 1$.

Ennyit akartunk kérdezni, de a feladatlap gépelésekor kimaradt a *„nem negatív"*, s ez elkerülte a figyelmünket. Így a feladat lényegesen nehezebb lett. [2]-ben található a feladatra egy, a differenciálszámítást és egy, a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget felhasználó megoldás. $-1/2 < x < 1$ esetén az előbb leírtak érvényesek, elegendő a továbbiakban a $-1 < x < -1/2$ esettel foglalkozni. ($K(-1/2) = 0$, $x = -1/2$-nél nincs maximum.) Erre az esetre [2]-ben a következő megoldást találjuk:

Alkalmazzuk a pozitív $4(1-x)$, $108(1+x)$ és a $-9(1+2x)$ számokra az egyenlőtlenséget:

$$\sqrt[14]{[4(1-x)]^9\,[108(1+x)][-9(1+2x)]^4} \leq$$
$$\leq \frac{36(1-x)+108(1+x)-36(1+2x)}{14} = \frac{108}{14} = \frac{54}{7}$$

= állandó, amit tovább rendezve:

$$4^9(1-x)^9 108(1+x)9^4(1+2x)^4 \leq \left(\frac{54}{7}\right)^{14},$$

$$2^{20}3^{11}(1-x)^9(1+x)(1+2x)^4 \leq \frac{2^{14}3^{42}}{7^{14}},$$

azaz

$$K \leq \frac{3^{31}}{2^6 7^{14}}.$$

Egyenlőség csak akkor áll fenn, ha a számok egyenlőek, azaz

$$4(1-x) = 108(1+x) = -9(1+2x),$$

ebből

$$x = -\frac{13}{14}$$

adódik. A K-ra talált két maximum közül ez a nagyobb, így ez az a maximum, amit kerestünk (közelítőleg 14,12).

Felvetődik a kérdés, hogyan lehet ezeket a számokat (kifejezéseket) megtalálni. Erre mutatunk egy eljárást: csak a $-1 < x < -1/2$ esettel foglalkozunk. A számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenség akkor alkalmazható, ha

az $a(1-x)$, a $b(1+x)$ és a $c(1+2x)$ pozitív számokra $a(1-x) = b(1+x) = c(1+2x)$ és

(1) $9a(1-x) + b(1+x) + 4c(1+2x) =$ állandó összefüggések fennállnak. Mivel most $1+2x<0$, válasszuk c-t -1-nek, ekkor $-(1+2x) > 0$ teljesül.

(1) akkor teljesül, ha x együtthatója $-9a + b - 8 = 0$, ebből (2) $b = 9a + 8$. $a(1-x) = -(1+2x)$-ből

(2) $x = \dfrac{a+1}{a-2}$, $b(1+x) = -(1+2x)$ – ből

pedig (3) $x = \dfrac{-b-1}{b+2}$ adódik.

(1), (2) és (3)-ból

$$\frac{a+1}{a-2} = \frac{-b-1}{b+2} = \frac{-9(a+1)}{9a+10},$$

megoldásai

$$a = \frac{4}{9}, b = 12$$

(és előzetes választásunk értelmében $c = -1$). (Amennyiben a-, b-, c-re egészeket keresünk, vegyük ezek kilencszeresét, s a fentebbi számokat kapjuk.)

Kicsit ide kívánkozik az ún. „Zöld könyv" 2424-es feladata: *Adott R sugarú gömbbe írt forgáshengerek közül melyiknek a térfogata a legnagyobb?*

Tengelymetszetet készítve, a henger alapkörének sugarát r-rel, magasságát m-mel jelölve felírhatjuk a Pitagorasz tételt: $(2R)^2 = (2r)^2 + m^2$.

Ha a térfogat helyett annak négyzetét vesszük és m^2-et helyettesítünk, nagyon egyszerűen kapjuk a megoldást.

Csábító azonban $V = r^2 \pi m$ miatt r^2-et helyettesíteni. Erre mutatunk egy „zsákutcát". A térfogat képletbe

$$r^2 = \frac{4R^2 - m^2}{4}\text{-et}$$

helyettesítve és alkalmazva az egyenlőtlenséget:

$$V = \pi r^2 m = \pi m \frac{4R^2 - m^2}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{8}(4R - 2m)(2R + m)m \le$$

$$\le \frac{\pi}{8}\left(\frac{(4R-2m)+(2R+m)+m}{3}\right)^3 = \pi R^3,$$

ami állandó. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $4R - 2m = 2R + m = m$ – mondhatnánk. Ebből azonban $m = 0$ adódik, ami nyilván nem jó. Nagyvonalúan mondhatjuk, hogy alkalmazzuk a számtani és a mértani közepek közötti egyenlőtlenséget a következő pozitív számokra:

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}(2R-m), \frac{-1+\sqrt{3}}{2}(2R+m) \text{ és } m.$$

Ekkor

$$V = \frac{\pi}{2}\left[\frac{1+\sqrt{3}}{2}(2R-m)\right]\left[\frac{-1+\sqrt{3}}{2}(2R+m)\right]m \le$$

$$\le \frac{\pi}{2}\left(\frac{\frac{1+\sqrt{3}}{2}(2R-m)+\frac{-1+\sqrt{3}}{2}(2R+m)+m}{3}\right)^3,$$

azaz

$$V \le \frac{4\pi\sqrt{3}}{9}R^3 = \text{állandó}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha

$$\frac{1+\sqrt{3}}{2}(2R-m) = \frac{-1+\sqrt{3}}{2}(2R+m) = m.$$

Ebből $m = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}R$, illetve $r = \dfrac{\sqrt{6}}{3}R$ adódik.

Azokat a számokat (kifejezéseket), amelyekre alkalmaztuk az egyenlőtlenséget, most is úgy kaptuk, hogy megkerestük azokat az a, b, c valós számokat, amelyekre $a(2R-m)$, $b(2R+m)$ és cm pozitívak, valamint $a(2R-m) = b(2R+m) = cm$, illetve összegük állandó. c-t most 1-nek választhatjuk, a számolások elvégzését az olvasóra bízzuk.

Irodalom

[1] Késedi Ferenc: Egyenlőtlenségek, Tankönyvkiadó Budapest, 1965.

[2] II. Megyei Középiskolai Matematika Verseny, BJMT Győri Tagozata, 1994. (Összeállította: Csorba Ferenc, Náfrádi Ferenc, Szoldatics József).

Urbán János

A XXXI. Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjéről

A TIT Teleki László Ismeretterjesztő Egyesület immár tizedik alkalommal Vácott rendezte meg a 2002. évi Országos Kalmár László Matematikaverseny döntőjét 2002. június 24-26-ig.

A döntőben az előző fordulóban legjobban szerepelt 96 versenyző, 5-8. osztályos tanuló vett részt az ország minden részéből. A kétnapos versenyen az egyes osztályokban a legjobb eredményeket a következő tanulók érték el:

5. osztály

1. Grósz Dániel, Budapest, Kós Károly Általános Iskola (tanárai: Borbély Judit, Lábóné Kulcsár Alice),
2. Nagy Dániel, Hajdúböszörmény, Bocskai István Általános Iskola (tanára: Juhász László),
3. Tassenberger Anna, Budapest, Szilágyi Erzsébet Gimnázium (tanára: Horváth Eszter).

6. osztály

1. Szirmai Péter, Kisvárda, Vári Emil Általános Iskola (tanára: Csapó Lászlóné),
2. Szalkai Balázs, Veszprém, Szilágyi Erzsébet Általános Iskola (tanára: Gyúró Andrásné),
3. Pálinkó Gábor, Kunszentmiklós, Református Kollégium (tanára: Gyenes Magdolna).

7. osztály

1. Szilágyi Dániel, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium (tanára: Paróczai József, Pósa Lajos),
2. Kornis Bence, Budapest, Szent István Gimnázium (tanára: Chikánné Hortobágyi Klára),
3. Szűcs Gábor, Miskolc, Földes Ferenc Gimnázium (tanárai: Kováts Attiláné, Fejér Szabolcs, Pósa Lajos).

8, osztály

1. Paulin Roland, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium (tanárai: Hraskó András, Táborné Vincze Márta),
2. Jankó Zsuzsanna, Szeged, Radnóti Miklós Gimnázium (tanárai: Schultz János, Pintér Klára, Pósa Lajos),
3. Molnár András, Budapest, Fazekas Mihály Fővárosi Gyakorló Általános Iskola és Gimnázium (tanárai: Hraskó András, Táborné Vincze Márta, Pósa Lajos).

A döntő két napján a következő feladatokat kellett megoldani a versenyzőknek:

Ötödik osztály

1. nap

1. Hány olyan 3 jegyű pozitív egész szám van, amelyben a számjegyek (balról jobbra haladva) szigorúan növő sorrendben követik egymást?

2. Egy személyautó vezetője útközben a kilométer-számlálón ezt a számot olvasta: 15951. Érdekes, ez a szám jobbról balra olvasva ugyanaz, mint balról jobbra olvasva. Alig telt el egy óra 20 perc, és a kilométer-számláló újra ilyen szimmetrikus számot mutatott. Mekkora lehetett az autó átlagsebessége?

3. Igaz-e, hogy 50 különböző pozitív egész szám közül mindig ki lehet választani 8-at úgy, hogy ezek közül bármely kettő különbsége oszt-

ható legyen 7-tel? Állításodat indokold meg!

4. Bence nem sokkal este 6 óra után vacsorázni indult a nagymamájához. Megfigyelte, hogy ekkor az óra nagy és kis mutatója éppen 110°-os szöget zárt be. Amikor 7 óra előtt hazaérkezett, meglepődve vette észre, hogy az óramutatók ismét 110°-os szöget zárnak be. Hány percig volt távol Bence?

Hatodik osztály

1. nap

1. Hány olyan tízes számrendszerben felírt háromjegyű pozitív egész szám van, amelyben pontosan kétféle, 0-tól különböző számjegy szerepel?

2. Két tehervonat két párhuzamos sínpáron egymással szemben halad, mindkettő 45 km/óra sebességgel. Mindkét vonat 250 m hosszú. Mennyi idő telik el a két mozdony elejének találkozásától addig, amíg a két utolsó kocsi is elhalad egymás mellett?

3. Melyik az a háromjegyű szám, amelynek 7-szerese egy pozitív egész szám harmadik hatványa?

4. Egy konvex tízszög belsejében felvettünk 12 pontot. Az így kapott pontokat egymással és a sokszög csúcsaival egymást nem metsző egyenes szakaszokkal kötöttük össze mindaddig, amíg a sokszögtartományt háromszögekre daraboltuk. Hány háromszög keletkezett így?

Hetedik osztály

1. nap

1. Melyik az a legkisebb k pozitív egész szám, amelyhez van olyan pozitív egész, hogy teljesül a $180k = n^3$ egyenlőség?

2. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre teljesül, hogy $p + 10$ és $p + 14$ is prímszámok?

3. Egy rombusz egyik tompaszögű csúcsából merőlegeseket állítunk a csúcsba be nem futó két oldalra. A merőlegesek talppontjait összekötő szakasz fele olyan hosszú, mint a rombusz hosszabbik átlója. Mekkorák a rombusz szögei?

4. Melyik az a tízes számrendszerbeli kétjegyű pozitív egész szám, amely a 8-as, a 4-es és a 2-es számrendszerben is csupa egyforma számjeggyel írható fel?

5. Az ABC egyenlőszárú háromszög alapja AC. Az alapon fekvő szögeinek AD és CE szögfelezői az O pontban metszik egymást, és az O, D, C pontokra illeszkedő kör K középpontja az AC alapon van. Számítsuk ki az ABC háromszög szögeit!

Nyolcadik osztály

1. nap

1. Igazoljuk, hogy a $\frac{2}{7}$ tört egyértelműen állítható elő két különböző pozitív egész szám reciprokának összegeként!

2. Számítsuk ki $2^6 - 1$ és $2^{15} - 1$ legnagyobb közös osztóját!

3. Egy táblára felírták az 1, 2, 3, 4, ..., 2001, 2002 számokat. Megengedett lépés, hogy két felírt számot letörlünk és helyettük felírjuk a különbségük abszolút értékét. Előfordulhat-e, hogy véges sok lépés után csak a 0 marad a táblán?

4. Az $ABCD$ négyzet belsejében fekvő P pontra igaz, hogy $APB\sphericalangle = 90°$ és $PB - PA = 2$. Számítsuk ki P-nek a négyzet középpontjától mért távolságát!

5. A kocka egy csúcsából induló 3 élének másik végpontjain át fektetett sík hányad részét vágja le a kocka ugyanezen csúcsából induló testátlójának?

Ötödik osztály

2. nap

1. Egy nagy táblára egymás mellé írtuk 1-től 100-ig a pozitív egész számokat. Ezután kitöröltük az összes 2-es számjegyet. Hány számjegy maradt a táblán?

2. Tudjuk, hogy 50 darab szám átlaga (számtani közepe) 44. Ha a számok közül kihagyjuk a 49-et és az 51-et, akkor mennyi lesz a megmaradt számok átlaga?

3. Barnabás nyáron a tanyavilágban töltött egy hetet. Négy tanyáról mesélt részletesen. El-

mondta többek között, hogy az elsőtől a második 3,4 km távolságra van, a másodiktól a harmadik 7,5 km-re, harmadiktól a negyedik 1,6 km-re, végül a negyedik tanya és az első tanya távolsága 2, 5 km. Milyen messze van az első és a harmadik tanya?

4. Hány számjegyből áll az a tízes számrendszerbeli legkisebb pozitív egész szám, amelyben a számjegyek összege 2002?

Hatodik osztály

2. nap

1. Melyik az a legnagyobb háromjegyű pozitív egész szám, amely 4-gyel osztva 3, 5-tel osztva 4 és 6-tal osztva 5 maradékot ad?

2. Az 1, 2, 3, ..., 9, 10 számokat felírtuk egy-egy cédulára, majd a cédulákat dobozba tettük. Hányféleképpen húzhatunk ki egyszerre 3 cédulát úgy, hogy a rájuk írt számok összege osztható legyen 3-mal?

3. Az ABC egyenlőszárú háromszög AC és BC szárára kifelé egy-egy szabályos háromszöget szerkesztettünk, ezek ACD és BCE. Tudjuk, hogy a D pont tükörképe az AC egyenesre a P pont, ez egyben az E pont tükörképe is a BC egyenesre. Mekkora a háromszög ACB szöge?

4. Két testvér túrázni indult. Az idősebb 4 km előnyt adott a fiatalabbnak, mert a fiatalabb csak 4 km/óra sebességgel halad, míg az idősebb 6 km/óra sebességgel. Egyszerre indulnak, és azonos irányba mennek. A kutyájuk egész idő alatt a két testvér között futott 15 km/óra sebességgel. Az idősebbtől indult, amint a fiatalabbhoz ért, azonnal visszafordult az idősebb felé, és így tovább, amíg a két testvér találkozott. Hány km-t tett meg a kutya a testvérek találkozásáig?

Hetedik osztály

2. nap

1. Melyek azok a p prímszámok, amelyekre $p^2 - 6$ és $p^2 + 6$ is prímszám?

2. Egy folyón és mellette egy tavon egy-egy evezős tartott edzést. Mindketten 8 km/óra sebességgel eveztek (az állóvízhez képest). Egyvonalból indultak, ugyanolyan távolságra eveztek, majd visszafordultak, és visszaeveztek a kiindulási helyre. Melyikük ért vissza hamarabb és mennyi a két evezős visszatéréséig eltelt idők aránya, ha a folyó sebessége 4 km/óra?

3. Az ABC egyenlőszárú háromszögben $AB = BC$. A BC száron a P, az AB száron a Q pontot úgy vettük fel, hogy $AC = AP = PQ = QB$ teljesül. Számítsuk ki a háromszög szögeit!

4. Miyen d alapszám esetén igaz, hogy van olyan tízes számrendszerben felírt háromjegyű szám, amely pontosan kétszerese az ugyanazokkal a számjegyekkel, ugyanilyen sorrendben, a d alapú számrendszerben értelmezett számnak?

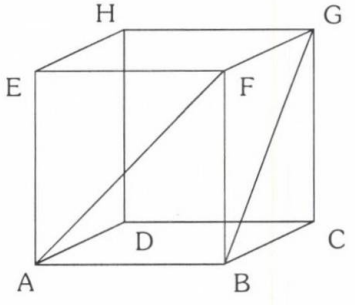
Nyolcadik osztály

2. nap

1. Melyik az a tízes számrendszerben felírt hatjegyű szám, amelynek első jegye 1, és ha ezt az 1 számjegyet a többi öt számjegy után a szám végére helyezzük át, akkor az így kapott hatjegyű szám éppen 3-szorosa az eredeti számnak?

2. Igazoljuk, hogy ha n pozitív egész szám, akkor 2^n nem állítható elő két vagy több egymást követő pozitív egész szám összegeként!

3. Az ábrán látható kocka éle 1 egység hosszúságú. Számítsuk ki az AF és BG lapátló egyenesek távolságát!



4. Adott 20 pozitív egész szám, amelyek nem nagyobbak 70-nél, legyenek ezek

$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{20}$. Igazoljuk, hogy az $a_i - a_j$ $(i > j)$ különbségek között van legalább 4 egyenlő!

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: Kosztolányi József

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére – 6757 Szeged, Miklós u. 27. – küldjék. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2002. november 30.

Az itt következő öt feladatot eredetileg az amerikai *Pi Mu Epsilon Journal* nevű folyóirat különböző számaiban tűzték ki. A folyóiratról a http://www.pme-math.org/journal/ internetes címen található információ.

205. Az ABC háromszögben a szokásos jelölésekkel $\alpha = 30°$, $\beta = 45°$. Határozzuk meg azt a k pozitív számot, amelyre teljesül, hogy $AB^2 = k \cdot BC^2 + CA^2$.

206. Jelölje p_n az n-edik prímszámot, $\pi(x)$ pedig az x-nél nem nagyobb prímszámok számát. Mutassuk meg, hogy bármely 6-nál nem kisebb pozitív egész n esetén

$$\pi(\sqrt{p_1 p_2 \ldots p_n}) > 2n.$$

207. Vegyük fel az ABC háromszög AB és AC oldalára kifelé a PBA és QAC szabályos háromszögeket. Jelölje R a BC oldal felezőpontját, G pedig a QAC háromszög középpontját. Mit mondhatunk a PRG háromszögről?

208. Jelölje $d(n)$ az n pozitív egész szám pozitív osztóinak a számát, $\mu(n)$ pedig a Möbius-féle függvényt. Igazoljuk, hogy $d(n) + \mu^2(n) = d(n^2)$ pontosan akkor, ha n prímszám!

209. Minden pozitív egész n esetén tekintsük azt a háromszöget, melynek oldalai $4n^2$, $4n^4 - 1$, $4n^4 + 1$ hosszúságúak. Jelölje a $4n^2$ hosszúságú oldallal szemközti belső szög radiánban vett mértékét α_n. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \frac{\pi}{2}.$$

Feladatmegoldások (190-194. feladatok)

190. Hat valós számot felírtunk egy körvonalra úgy, hogy bármelyik szám az óramutató járásával megegyező irányban őt követő két szám különbségének abszolút értékével egyenlő. Melyek a körvonalra írt számok, ha tudjuk, hogy összegük 1?

Megoldás: A feltételből adódik, hogy a körvonalra írt számok egyike sem lehet negatív. Legyenek a számok az óramutató járásával megegyező irányban rendre a, b, c, d, e és f, és tegyük fel, hogy a-nál nagyobb nincs a többi öt szám között. A feltétel értelmében $a = b - c$ vagy $a = c - b$. Tegyük fel, hogy $a = b - c$. Az a-ra tett feltevés értelmében ekkor $c = 0$ és $a = b$. Ebből viszont adódik, hogy $d = b = a$ is teljesül. Mivel $c = d - e = 0$, ezért $a = b = d = e$, és mivel $d = e - f$, ezért $f = 0$. Ha az $a = c - b$ feltételből indulunk ki, akkor hasonló gondolatmenettel kapjuk, hogy $a = c = d = f$ és $b = e = 0$.

Kaptuk, hogy két egymással szemközti szám értéke 0, a többi négy szám értéke pedig az összegre tett feltétel miatt $\frac{1}{4}$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 16.

191. Az első 2002 darab pozitív egész szám halmazából válasszuk ki azt a legnagyobb elemszámú részhalmazt, amely részhalmaz bármely két elemének különbsége összetett szám!

Megoldás: Mivel a legkisebb összetett szám a 4, ezért ha a kiválasztandó maximális elemszámú részhalmaz elemeit nagyság szerinti növekvő sorozatba rendezzük, akkor két szomszédos szám között a legkisebb különbség a 4 lehet csak. Így az {1, 5, 9, ..., 1997, 2001} és {2, 6, 10, ..., 1998, 2002} 501 elemű halmazok megfelelnek a feladat feltételének.

Ennél nagyobb elemszámú részhalmazt nem tudunk a feltételnek megfelelően kiválasztani. Vegyük ugyanis az alaphalmaz nyolc egymást követő elemét: n, $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 4$, $n + 5$, $n + 6$, $n + 7$ ($1 \le n \le 1995$). Ha az n kiválasztott, akkor $n + 1$, $n + 2$, $n + 3$, $n + 5$, $n + 7$ nem választható, és nem választható együtt a maradék két szám sem, hiszen a különbségük 2. Így tehát bármely nyolc egymást követő szám közül legfeljebb kettő választható. Ez azt jelenti, hogy 501 számnál többet nem tudunk kiválasztani, és ezt a maximális elemszámot csak a fenti két részhalmazzal tudjuk elérni.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 15.

192. Mutassuk meg, hogy az n pozitív egész szám pontosan akkor áll elő két háromszögszám összegeként, ha $4n + 1$ előáll két négyzetszám összegeként!

Megoldás: Tegyük fel először, hogy az n pozitív egész szám két háromszögszám összege, azaz

$$n = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{l(l+1)}{2},$$

ahol k és l pozitív egészek, és feltehetjük, hogy $k \ge l$. Ekkor

$$4n+1 = 2k^2 + 2k + 2l^2 + 2l + 1 =$$
$$= k^2 + l^2 + 1 + 2kl + 2k + 2l + k^2 - 2kl + l^2 =$$
$$= (k + l + 1)^2 + (k - l)^2.$$

Ezzel az állítás egyik felét beláttuk.

A másik irány bizonyítása végett tegyük fel, hogy $4n + 1 = a^2 + b^2$. Ebből a feltételből adódik, hogy a és b különböző paritású pozitív egészek, és

$$n = \frac{a^2 + b^2 - 1}{4} =$$
$$= \frac{\frac{a+b-1}{2} \cdot \frac{a+b+1}{2}}{2} + \frac{\frac{a-b-1}{2} \cdot \frac{a-b+1}{2}}{2}.$$

a és b különböző paritásából adódik, hogy $a + b - 1$, $a + b + 1$, $a - b - 1$, $a - b + 1$ mindegyike páros, így n valóban két háromszögszám összege, ha $a > b$. Ha $a < b$, akkor a fenti kifejezés második tagjában a számláló mindkét tényezőjének ellentettjét véve kapjuk a bizonyítandót.

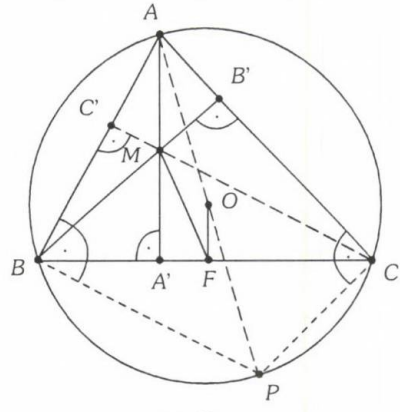
Több megoldás alapján

A megoldók száma: 16.

193. Az ABC háromszögben M a magasságpont, F a BC oldal felezőpontja, P pedig az A csúcsnak a köréírt kör középpontjára vonatkozó tükörképe. Mutassuk meg, hogy M, F és P egy egyenesre illeszkednek, és F felezi az MP szakaszt!

Kiss Sándor, Szatmárnémeti

I. megoldás: Legyenek az ABC háromszög magasságai AA', BB', CC', M a magasságpont, P pedig az A csúcsnak a köréírt kör O középpontjára vonatkozó tükörképe. (Az *1. ábra* alapján hegyesszögű háromszögre bizonyítjuk.)



1. ábra

AP a köréírt kör átmérője, ezért az ABP és PCA háromszögek derékszögűek. Ebből viszont adódik, hogy BP párhuzamos CC'-vel és PC párhuzamos BB'-vel. Az $MBPC$ négyszög két-két szemközti oldala párhuzamos, vagyis para-

lelogramma. A paralelogramma átlói felezik egymást, ezért F felezi az MP szakaszt.

Megjegyzés: A feladat állítása derékszögű háromszögre triviálisan teljesül, tompaszögű háromszögre pedig a fenti gondolatmenettel adódik.

Több megoldás alapján

II. megoldás: A háromszög köréírt körének középpontjából a csúcsokba mutató helyvektorok legyenek rendre $\vec{a}$, $\vec{b}$ és $\vec{c}$. Ismert, hogy ekkor az M magasságpontba mutató helyvektor $\vec{m} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$. Az F pont helyvektora

$$\vec{f} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2},$$

a P pont helyvektora pedig $\vec{p} = -\vec{a}$. Könnyen adódik, hogy

$$\vec{f} = \frac{\vec{p} + \vec{m}}{2},$$

ami a feladat állítását bizonyítja.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 17.

194. Legfeljebb hány részre osztja a koordinátasíkot 2002 darab, a valós számok halmazán értelmezett másodfokú függvény grafikonja?

Megoldás: Ha két másodfokú függvény grafikonja (két y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola) nem esik egybe, akkor legfeljebb két közös pontjuk lehet. Maximális számú síkrészt akkor kapunk, ha bármely két grafikon metszi egymást két pontban, és nincs a síknak olyan pontja, amelyen kettőnél több grafikon halad át. Jelölje $P(n)$ az n darab grafikon által meghatározott maximális síkrész számot. Tegyük fel, hogy $n - 1$ grafikont már berajzoltunk úgy, hogy a síkrészek száma maximális, és vegyünk ezekhez egy n-edik grafikont. Maximális esetben ezen a grafikonon $2n - 2$ metszéspont jön létre, ezek a parabolát $2n - 1$ ívre osztják, és ezen ívek mindegyike két részre oszt egy korábban már meglevő síkrészt. Így $P(n) = P(n - 1) + 2n - 1$.

Rövid számolással adódik, hogy $P(n) = n^2 + 1$, azaz n darab y tengellyel párhuzamos tengelyű parabola a síkot legfeljebb $n^2 + 1$ részre osztja.

Be kell még látni, hogy megadható a maximális felosztást megvalósító n darab függvény. Bármely pozitív egész n esetén legyen $f_n(x) = 2^n x^2 - 2^{2n}$ a valós számok halmazán értelmezett függvény. Ha $n \neq m$, akkor az f_n és f_m függvények grafikonjainak közös pontjaira nézve az $x^2 = 2^n + 2^m$ egyenletből kapjuk az első koordinátákat. Ezek különböző $(n; m)$ számpár esetén különbözők (ez adódik például a kettes számrendszerbeli felírás egyértelműségéből), így a fenti függvénysorozat valóban megvalósítja a fenti felbontást.

A feladatban $n = 2002$, így legfeljebb $2002^2 + 1 = 4008005$ síkrész jöhet létre.

Udvari Tibor, Baja

Megjegyzés: A maximális felosztást megvalósító függvénysorozatokra a fenti megoldásban közöltön kívül még a következők érkeztek (minden másodfokú függvény a valós számok halmazán van értelmezve):

$$f_n(x) = \frac{1}{n}x^2 + n$$

Kamarás Lajos, Pécs; Kiss Zoltán, Pécs; Rakonczai György, Budapest

$$f_n(x) = nx^2 - n^2$$

Kiss Géza, Kisújszállás

$$f_n(x) = \frac{1}{2^n}x^2 + n$$

Dályay Pál Péter, Szeged; Schmidt Edit, Budapest

$f_n(x) = a_n x^2 + b_n$, ahol $\{a_n\}$ szigorúan csökkenő, $\{b_n\}$ pedig szigorúan növekvő, pozitív tagokból álló sorozat.

Zsidó Nagy György, Kolozsvár

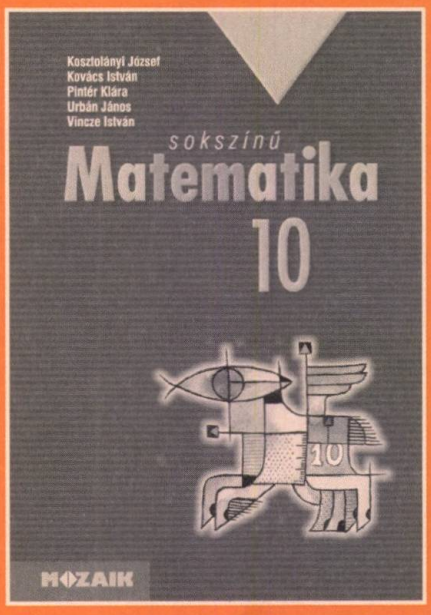
A megoldók száma: 12.

A megoldók névsora: Csorba Ferenc, Győr (190-193.); Dályay Pál Péter, Szeged (190-194.); Horváth Géza, Zselíz (193.); Kamarás Lajos, Pécs (190-194.); Kiss Géza, Kisújszállás (190-194.); Kiss Zoltán, Pécs (190-194.); Koncz Levente, Budapest (190-194.); László Sándor, Szombathely (190., 192., 193. 2 mód); Molnár István, Gyula (190-193.); Nagy Béla, Sarkad (190-194.); Rakonczai György, Budapest (190-194.); Schmidt Edit, Budapest (190-194.); Simon József, Csíkszereda (190-194.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (190-192., 193. 3 mód); Udvari Tibor, Baja (190-194.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (190-194.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (190-194.).

SOKSZÍNŰ MATEMATIKA TANKÖNYVCSALÁD

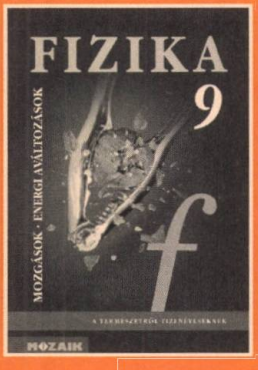
EGYEDÜLÁLLÓ SIKER A TANKÖNYVEK KÖZÖTT

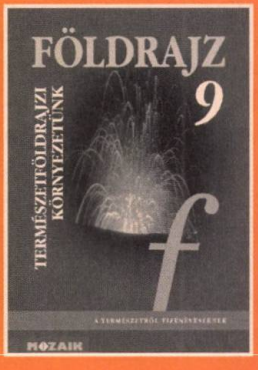
Ez évben három rangos díjat is elnyert az új 9. évfolyamos matematika tankönyv: a *Nemzetközi Könyvfesztivál* Budai-díját, a *Szép Magyar Könyv 2001* Verseny díját és különdíját. Szeptember végén kerül az iskolákba a sorozat 10. osztályos kötete. A tankönyvek különlegessége a sokszínű és gazdag feladatanyag, és a matematikai ismereteket jól szemléltető színes ábrák és képek.

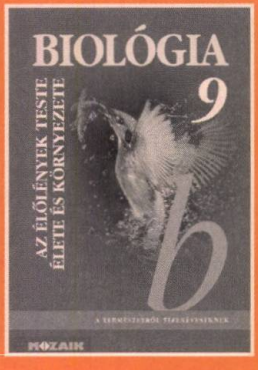


A kötetek szerzői: *5-8. osztály:* Csordás Mihály - Konfár László - Kozmáné Jakab Ágnes - Pintér Klára - Vinczéné Winter Andrea; *9-12. osztály:* Kosztolányi József - Kovács István - Pintér Klára - Urbán János - Vincze István

A SZÉP MAGYAR KÖNYV 2001 VERSENY DÍJNYERTES KÖTETEI







MOZAIK KIADÓ
Levélcím: 6701 Szeged, Pf. 301.
Telefon: (62) 470-101, Fax: (62) 554-666
E-mail: kiado@mozaik.info.hu

MOZAIK KÖNYVESBOLT
1082 Budapest, VIII. Üllői út 70., Tel.: 31-42-612

www.mozaik.info.hu

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

MÓDSZERTANI FOLYÓIRAT

KÖNYVTÁR VERSEGHY SZOLNOK

200 éve született Bolyai János

A matematikai tehetség és fejlesztése

(Putz Erzsébet)

Melyik lottót játsszuk?

(Török Tamás)

A mértani sorozat összegképletének levezetése

(Udvari Tibor)

X. ÉVFOLYAM 2002 5

MOZAIK

A MATEMATIKA TANÍTÁSA

módszertani folyóirat

Szerkesztőség:
Főszerkesztő:
Dr. Urbán János

Szerkesztőség címe:
6723 Szeged, Debreceni u. 3/B
Tel.: (62) 470-101,
FAX: (62) 470-185

Kiadó:
MOZAIK Kiadó Kft.
Felelős kiadó: Török Zoltán
Tördelőszerkesztő: Forró Lajos
Borítóterv: Deák Ferenc

Megrendelhető:
MOZAIK Kiadó
6701 Szeged, Pf. 301
Éves előfizetési díj: 1100 Ft

A lap megvásárolható a
MOZAIK Könyvesboltban:
Budapest VIII., Üllői út 70.

Megjelent az Oktatási
Minisztérium támogatásával.

A Matematika Tanításában megjelenő valamennyi cikket szerzői jog védi. Másolásuk bármilyen formában kizárólag a kiadó előzetes írásbeli engedélyével történhet.

ISSN 1216-6650

Készült
az Innovariant Kft.-ben, Szegeden
Felelős vezető: Drágán György

TARTALOM

200 éve született Bolyai János

A matematikai tehetség és fejlesztése
Putz Erzsébet tanár, Budakalász

Melyik lottót játsszuk?
Török Tamás főiskolai docens, Esztergom

Matematikai versenytesztekről II.
Dr. Kántor Sándorné dr. Varga Tünde
adjunktus, Debrecen

A 2002. évi Beke Manó-emlékdíjasok

A mértani sorozat összegképletének levezetése
Udvari Tibor tanár, Baja

Feladatrovat tanároknak

äKözlési feltételek:

A közlésre szánt kéziratokat gépelve (két példányban), floppy lemezen vagy e-mailen (kattila@mozaik.info.hu) küldjék meg a szerkesztőség címére. A kéziratok lehetőleg ne haladják meg a 8-10 gépelt oldalt (oldalanként 30 sorban 66 leütés). A rajzokat, ábrákat, táblázatokat és fényképeket külön lapon megfelelő szövegezéssel kérjük ellátni. (A szövegrészben pedig zárójelben utaljanak rá.)

Kérjük, hogy a szövegbeli idézetek név- és évszámjelöléssel történjenek, míg a tanulmányok végén a felsorolt irodalom alfabetikus sorrendben készüljön. Kérjük szerzőtársainkat, hogy a kéziratok beküldésével egyidejűleg szíveskedjenek közölni pontos címüket, munkahelyüket és beosztásukat. A cikk megjelenése után a lemezeket visszaküldjük.

200 éve született Bolyai János

KÖNYVTÁR VERS SZOLNOK

Bolyai János levele apjához, Bolyai Farkashoz Temesvárról, 1823. november 3-án (részlet)

„A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, elkészítem, s mód lesz, a paralelákról egy munkát adok ki; ebben a pillanatban nincs kitalálva, de az az út, melyen mentem, csaknem bizonyosan ígérte a cél elérését, ha az egyébiránt lehetséges; nincs meg, de olyan felséges dolgokat hoztam ki, hogy magam elbámultam, s örökös kár volna elveszni: ha meglátja Édes Apám, megesmeri; most többet nem szólhatok csak annyit: hogy semmiből egy új, más világot teremtettem; mindaz, amit eddig küldöttem, csak kártyaház a toronyhoz képest. Meg vagyok győződve, hogy nem sokkal fog kevesebb becsületemre szolgálni, mintha feltaláltam volna (a párhuzamossági axióma bizonyítását)."

Bolyai

„Semmiből egy új, más világot teremtettem."
Bolyai János levele atyjához.

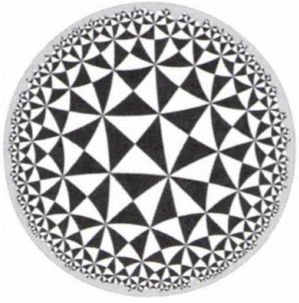
Isten elménket bezárta a térbe
Szegény elménk e térben rab marad:
a kapzsi villámölyv, a gondolat,
gyémántkorlátját még csak el sem érte.

Én boldogolván azt a madarat
ki kalitkájából legalább kilátott,
a semmiből alkottam új világot,
mint pókhálóból sző kötélt a rab.

Új törvényekkel, túl a szűk egen,
új végtelent nyitottam én eszemnek;
király gyanánt, túl minden képzeten

kirabolván kincsét a képtelennek
nevetlek, mint Istennel osztozó,
vén Euklides, rab törvényhozó.

(Babits Mihály)



Az ábrákat Szilassi Lajos készítette

Putz Erzsébet

A matematikai tehetség és fejlesztése

„A tehetségben épp az a szép, hogy él, hogy kiszámíthatatlan, hogy meglepő, hogy utólag úgy evidens, akár egy kör, de mégis tökéletesen megjósolhatatlan: azzal általános és egyetemes, hogy egyszeri."

Pilinszky János

A tehetség természete

A tehetség meghatározása

Meglepődve tapasztaltam év elején a szülői értekezleten, hogy a felnőttek menynyire nem tudják, hogy mi rejtőzik a tehetség szó, a tehetségfejlesztés kifejezés mögött. A tanévben választható szakköröket soroltam föl, köztük a tehetségfejlesztőt is, amikor egyszerre többen is feltették a kérdést: mit is takar ez a fogalom, mi fog ott történni?

Valójában mi a tehetség, ki a tehetséges?

Kezdetben a sikeres embereket, később a különböző intelligencia-tesztekben legmagasabb pontszámokat elérőket tartották tehetségesnek. Ma már a tehetséget sokarcú jelenségnek tekintik, magát a fogalmat pedig többféle sajátos tehetséget magába foglaló gyűjtőfogalomként értelmezik. Igazából négy kritériumot érdemes kiemelni: a tehetség potenciált, lehetőséget jelent olyan **kiemelkedő teljesítményre,** amely **társadalmilag hasznos,** és amely **megelégedéssel, örömszerzéssel** jár elérője számára. (Czeizel 1997)

A tehetség örökletessége és szerzettsége

Ha visszatekintünk a kultúra történetére, állandó háború folyt a vulgárgenetikusok és a vulgárszociológusok között. A vulgárgenetikusok azt mondták, hogy mint mindent, így a tehetséget is a génjeink döntik el. Vagyis amikor megszületünk, már ott van bennünk a tehetség lehetősége, s az élet során ez csak kifejezésre jut. A vulgárszociológusok pedig azt állították, hogy üres lappal születünk, és életünk folyamán írjuk tele azt. Szerintük minden teljes egészében a külső hatásoktól függ.

A korábbi háború jelenleg békés kompromisszumba ment át, mivel a modern genetika alapképlete: **P = G – E**

A **P** a társadalmi tevékenységben realizálódó teljesítményt jelenti (a genetikában a megnyilvánuló jelleget phenotípusnak nevezik, innen a P jelölés). A **G** a veleszületett genetikai lehetőségeket, tehát az adottságot, így az örökletességet, az **E** (environment) a külső hatásokat, magyarul a „tanultságot" jelenti. A teljesítmény szempontjából tehát a lényeg a G és az E együttes szerepe, interakciója, bonyolult együtthatása.

A **P,** a társadalmi tevékenység kapcsán megnyilvánuló teljesítmény függ a genetikai adottságoktól, és függ azoktól a külső hatásoktól, amelyekről az előzőekben szó volt. Arányuk a különböző adottságkomponensekben, ezen belül a specifikus és mentális adottságok esetében is jelentősen különbözik. Az örökletesség az általános értelmesség esetén 50-60 százalékos, de a matematikai képességekben 90 százalék körüli. Vagyis a **G** eldönt sok mindent, széles spektrumot fog át, de a környezeti tényezőktől függ a végeredmény.

A **kivételes tehetségnek** tehát három jellegzetessége van. Az első, hogy a megvizsgált képesség az átlagot számottevően meghaladja. A második, hogy a kivételes társadalmi tevé-

kenységhez szükséges négy komponens harmonikusan illeszkedjen. Végül a harmadik, hogy az adottságnak és a tanultságnak az interakciójából a képesség hogyan válik valóra.

A tehetség összetevői

A kivételes adottság négy összetevőt foglal magában:

a) általános értelmesség

b) átlagot meghaladó mentális adottság

c) kreativitás

d) motiváció.

Az **általános értelmesség** képessé tesz arra, hogy tanuljunk, a megtanultakat elraktározzuk az agyunkban, és a szükséges helyzetekben fel tudjuk használni azokat. Mérését az intelligencia-tesztekkel végzik. Ezek a tesztek feltárják a gyermek gondolkodását, emlékezetét, figyelmének sajátosságait, megértő-képességét, a számokkal való bánni tudását, a hétköznapi problémák megoldására való készségét. A gyerekek, ahogy nőnek, egyre nagyobb jártasságot mutatnak ezeken a területeken. Az intelligencia fokát az intelligencia hányados (IQ) határozza meg, amely kiindulási pontul az életkornak megfelelő átlagot 100-nak vette, s ettől számította lefelé és felfelé az egyes vizsgált személyek intelligenciáját. A tehetségzónát a 130 és a 200 közötti IQ jelölte, s a 160 és 200-as övezetben elhelyezkedőket már zseninek tartják.

A **specifikus mentális képességek** határozzák meg lényegében a tehetség irányát. A tudományos kutatás újabban a különböző specifikus mentális adottságok-képességek alapján tehetségtípusokat vagy tehetségszférákat különít el. Így Gardner 1983-ban hét tehetségszférát körvonalazott: nyelvi, matematikai-logikai, térbelitájékozódási, zenei, interperszonális és testmozgási. Sternberg 1977-ben más megközelítésből viszont három: analitikus, szintetikus és praktikus tehetségtípusokat különböztet meg.

A pedagógiai tapasztalat és a tudományos kutatás egyértelműen bizonyította, hogy az említett tehetségszférák viszonylag függetlenek egymástól. Az iskolai gyakorlat csak a gyermekek néhány tehetségszférájára van tekintettel, emiatt nagyon szűken mérik a tehetséget. Minél több oldalról tapogatnánk le a gyermekek adottságait, annál több tehetséget lehetne felfedezni.

A **kreativitás** ismérvét nehéz egységes definícióba foglalni. Sokan, szűken értelmezve a fogalmat a divergens gondolkodással azonosítják. Mások a tehetség szinonímájának tartják. A tudomány is többféleképpen fogalmazza meg, attól függően, hogy a kreatív személyiséget a kreativitás termékét vagy az alkotó folyamatot állítja a középpontba. Feltalálásra való képességet, produktív gondolkodást jelenthet.

A kreatív személyiség fogalmán belül az **eredetiség** a legfontosabb, amely a másképpen gondolkodás adottságán nyugszik, megmagyarázza a kreatív emberek gyakori kérdéseit és dús fantáziáját, eredeti ötleteiket és megoldásaikat. Ugyanakkor az elfogadott vélemények, tanok bennük az elégedetlenség és kétkedés érzetét keltik. Az így keletkezett szellemi feszültség megmagyarázza túlzott aktivitásukat, továbbá mentesülésüket a bejárt út korlátaitól és biztonságától. Látásmódjuk és gondolkodásuk ezért keresi az új megoldásokat.

A kreatívak jellemvonása a túlzott érzékenység is. Amíg érzékenységüknek köszönhetően többet észrevesznek a hibákból, a megoldásra váró problémákból, addig jó. Hiszen ez készteti őket új, hatékony tettekre. Viszont a túlzott érzékenység vezethet a vélt vagy valós sérelmek eltúlzásához, amely már az alkotás gátja lehet.

Kiemelést érdemel fokozott kritikai érzékük. Kritikusságuk kétirányú, egyfelől az önmagukkal szembeni elégedetlenségben nyilvánul meg. A tökéletesség igénye, a megoldásra váró problémák újabb és újabb feladatok megoldására sarkallja őket, ezért sokszor elnyomja bennük az eredményeik okozta sikerélményt. Másfelől a belső tökéletesség vágya meghatározó életművük beteljesedése szempontjából.

A kreatív produktumot magával a kreatív teljesítménnyel határozzuk meg. Abból a szempontból értékeljük, hogy az elemek újrastrukturálása mennyire sikerült, és az eredmény, az új produktum valóban használható-e.

Megkülönböztetünk egyéni és társadalmi kreativitást. Az egyéni kreativitás az egyén tapasztalati világából merít, és az eredmény is ott értékes. A társadalmi kreativitás hatásköre viszont tágabb, egy egész kultúrkörre vonatkozhat. Mivel az egyéni kreativitás az alapja a társadalmi átalakulásokat formáló folyamatoknak is, rendkívül fontos az egyén kreatív tevékenységének fejlesztése.

A kreatív folyamatban négy fázist különböztetünk meg.

Az előkészítő szakasz a probléma megfogalmazását és az anyaggyűjtést jelenti. A lappangási fázisban az ismeretek szembesülnek a problémával és az összegyűjtött anyaggal. Ennek során új összefüggések körvonalazódnak. A megértés fázisában már megjelenik a megoldás. Az igazolás fázisa az, amelyben a megoldást ellenőrizhetjük, tesztelhetjük, hogy valóban újat hozott-e, és tágítja-e az egyén vagy kultúrköre kereteit.

Ha a kreatív folyamat négy fázisát elemezzük, kiderül, hogy az előkészítő és az igazolási szakaszban inkább a logika használatára van szükség, míg a lappangási és a megértési fázisban a fantáziaműködés kell, hogy hangsúlyos legyen.

A tehetség negyedik összetevője a **motiváció,** amelyet a szorgalom, a kitartás, a megszállottság névvel is illetünk, s amely a személyiség sarkalló ereje. Az egyén szempontjából döntő jelentőségű, hogy az előbbiekben felsorolt adottságokat ez a motiváció mennyire segíti kibontakozni. Eredete, iránya, mibenléte nagyon kérdéses. Alapvető fontosságú, koroktól és kultúráktól független eleme a tehetségnek.

Motívumnak nevezzük azt a személyi belső feltételt, amely cselekvést, gondolatot vált ki. Sokáig tartotta magát az a nézet, miszerint az alapvető motívumok a drive-redukció elve alapján működnek, ami azt jelenti, hogy minden motívum a feszültség csökkentésére irányul. Ez azonban nem kínál magyarázatot a kíváncsiság motívumra, amikor a feszültség növelése érdekében kezd cselekvésbe az egyén. Az optimális arousal-szint elgondolás jobb magyarázatnak tűnik. A hiányállapotok az optimális fölé emelik az arousal-szintet, és olyan viselkedést eredményeznek, amely lecsökkenti azt. Ha viszont az ingerlés túl alacsony, az arousal-szint növelése motiválja a szervezetet. Ingereket, újdonságokat keresünk a környezetben, amíg elérjük az optimális arousal-szintet.

A leghatékonyabb motiváció a pozitív önkép és kíváncsiság által támogatott teljesítmény és siker elérésére irányuló belső hatóerő.

A tehetségesek általában belső kontroll vezérlésűek, önállóak, fejlődésorientáltak.

Kiemelkedő intellektusuk segíti őket abban, hogy környezetüket kontrollálják. Nagy erővel bírnak az alkotás és az önmegvalósítás terén. Kevés külső irányításra van szükségük. Nem eldöntött kérdés, hogy a kiemelkedő alkotók az átlagosnál erősebb, vagy minőségileg eltérő motivációs bázissal rendelkeznek-e.

Külső feltételek hatása a tehetségre

A család

Ha feltesszük a kérdést, hogy a matematikai tehetség hol fejlődik ki inkább, ott ahol a papa, mama matematikus, vagy egy külvárosi szegény családban felnövő gyermek esetében, a válasz egyértelmű. Természetesen az első esetben.

A kérdés az, hogy miért! Azért, mert a szülőktől jó géneket kapott, vagy mert mintát látott a családban, vagy azért, mert efelé irányította a tudatos családi nevelés?

Az ilyen gyermek biztosan azért lesz jó matematikus, mert jó géneket kapott. Hiszen valaki azért lesz matematikus, mert a matematikában tehetséges, és azért tehetséges a matematikában,

mert a matematikát elég erősen a gének határozzák meg. Emellett a minta is fontos. A matematikus családban elképzelhető, hogy még a vasárnapi reggelinél is a kétismeretlenes egyenletek gyönyörűségéről beszélnek. Végül érvényesül még a szociokulturális hatás is: segítik, tanítják a gyereket, mert a szülő a gyermekének adja át azt, amit ő tud.

Ha végiggondoljuk a másik, szegény család helyzetét, akkor megállapítjuk: nem valószínű, hogy ott a gyermek jó matematikai géneket örökölt, illetve bizonyos, hogy a családi körben vasárnaponként matematikai példákról nem beszélnek, és nem nagyon tudják segíteni gyermeküket.

Howe (1990) a családi hatások szerepét két fontos úton látja megvalósulni. Először is a családok segítik gyermekeiket abban, hogy megszerezzék az alapvető ismereteket, készségeket és mentális stratégiákat. Másrészt a családtagok átadják saját értékeiket és azon teljesítményfajták iránti attitűdjeiket, amelyek tanuláson és gyakorláson alapulnak. A szülői bátorítások és elvárások együttes hatása, az iskolai szerepmodellek megléte és a szülő az irányú erőfeszítése, hogy a gyereknek ne csak lehetősége legyen a tanulásra, hanem jelentős időt is szenteljen annak, alakítják ki az intellektuális és érzelmi légkört, amelyben nem nehéz sikeresen teljesíteni.

Davis-Rimm (1985) a tehetséges gyermekek fejlődésében kiemelt szerepet tulajdonít a család értékeinek, és azok megfelelő közvetítésének. Erről így ír: „Alapvető, hogy a gyermek mindkét szülőtől egyértelmű és következetes üzeneteket kapjon. Úgy tűnik, hogy olyan alapvető értékekben, mint a tanulás és az iskola fontossága, a személyiség tiszteletben tartása, az ésszerű mértékű pihenés és szórakozás szükségességének felismerése, a szülői egyetértés egy pozitív és teljesítményorientált légkör alapjául szolgál."

Az iskola

Az, hogy milyen iskolába kerül valaki, rengeteg mindent eldönt. Egyértelműen beigazolódott az iskola szerepe a szellemi adottságok és a személyiség kibontakozásában. Az iskola szerepének megítélésekor három vélemény ismert:

a) Az iskola konzerválja a tanulók között meglévő örökletes és családi hatásokból eredő különbséget.

b) Az iskola eltünteti, eltüntetheti a gyermekek magukkal hozott különbségeit.

c) Az iskola fokozhatja az amúgy is meglévő eltéréseket a tanulók között.

A pedagógia meghatározó fontosságát azért kell hangsúlyozni, mert a bennünk lévő érték kibontakozását, megvalósulását gondos és szakszerű bábáskodással lehet csak elérni.

Meg kell fogadnunk Comenius intelmét: „A tanulás nem mártírum, hanem igaz gyönyörűség legyen."

Az eltérő egyéni képességeket differenciált munkával lehet igazán fejleszteni.

Minél jobbak a veleszületett adottságok, a környezeti hatások annál inkább éreztetik jótékony vagy kártékony hatásukat. A megfelelő iskolai körülmények a tehetségesek esetében különleges egyéni és társadalmi haszonnal járnak.

A pedagógusoknak három nehéz feladatot kell megoldaniuk a gyermekek tehetségének kibontakoztatásakor:

1. A tanulók személyiségének minden értékes vonását ki kell bontakoztatni.
2. Az általános értelmi képességet kell fejleszteniük.
3. Meg kell keresni azokat a speciális mentális adottságokat, amelyek bennük a legjobbak, és az átlagost meghaladják.

Kortársak

A tizenéves gyerekek számára ebben az időszakban a legfontosabb a kortársi elvárás. Fontosabb, mint a szülő, és sokszor fontosabb, mint az iskola.

A szülőktől leváló tizenéveseknek új szövetségesekre van szükségük, ezért ebben az időszakban különösen fontosak a kortársakkal,

osztálytársakkal kialakított barátságok, melyet az egyenrangúság, az azonos érdeklődés köt össze. Ennek veszélyei is vannak.

Társadalom

A társadalom nyújtotta lehetőség és elvárás meghatározó. A társadalom egésze rányomja bélyegét a családra, az iskolára, sőt a kortárs csoportra is, ezért nehéz ezektől különválasztani. Ezen kívül az iskolák elvégzése utáni szellemi teljesítmény meghatározó feltételét jelentik a társadalmi körülmények, elvárások és lehetőségek. Czeizel Endre felmérést készített, melyben megvizsgálta a 19. században született kiemelkedő társadalmi teljesítményt elért személyiségek világra jöttének éveit tízéves bontásban. Meglepő képet kapott. Az azonos földrajzi területen közel azonos népességszám mellett több, mint kilencszeres az eltérés az 1850-59 közötti években született és maximumnak számító négy személy, valamint az 1880-89 közötti tíz évben világra jött és maximumot jelentő 37 személy között. Ha abból a népesség-genetikai alaptételből indulunk ki, hogy a különböző területeken és időben élő népességben a kivételes adottságú személyek relatív gyakorisága azonos, akkor könnyű rájönni arra, hogy a kiegyezést követő magyar gazdasági csoda hatása tükröződik az 1880 és 1889 között született és virágzó nagyszámú tehetségben. A történelmi viszontagságok miatt kontraszelektált vezető rétegek általában tehetségellenesek. Minden politikai rendszer a vezető pozíciókba a számára megbízható embereket helyezi. A kivételes képességű emberek ritkán ilyenek. A nagy emberek szenvedélyüknek, alkotó munkájuknak élnek. Kondor Béla így fogalmazta meg: „Két fajta emberi törekvés van. Az egyik csoportba tartozók „ítélkezni", tehát vezetni, uralkodni kívánnak, amihez hatalomra van szükségük. A másikba sorolhatók „csak" jelet szeretnének hagyni maguk után. S az ítélethozó vezetők és politikusok nehezen viselik el a náluk tehetségesebb és gyakorta összeférhetetlen nagyságokat."

„A matematika érdekes és szép is. Az emberi gondolat izgalmas és szép kalandja. Nem valami járulékos dolog, hanem a lényegéhez tartozik. A valódi igazság mindig szép, és a valódi szépség mindig igaz"

Rényi Alfréd

A matematikai tehetség

A matematikai tehetség jellemzői

Kultúránkban mélyen gyökerezik az a hiedelem, hogy a matematika szépségének értékelésére és az öröm átélésére az emberiségnek csak egy egészen kis töredéke alkalmas.

A matematikával szemben mind a mai napig a legkülönfélébb előítéletekkel találkozunk. Egyesek azt állítják, hogy a matematikával való foglalkozáshoz különleges tehetségre van szükség, mások azt mondják, hogy egy különleges matematikai emlékezőtehetség kell az összefüggések, formulák megjegyzéséhez. Van, aki azt tartja, hogy nem formulákat, hanem gondolatmeneteket kell megjegyezni. Ignatyev 1911-ben a Találékonyság birodalma című könyvében ezt írta: "Tanítsuk meg a gyerekeket örömmel és tudatosan gondolkodni. A többi magától adódik."

Valóban ilyen egyszerű a dolog?

Nézzünk néhány példát nagy matematikusok indulásáról.

A mindeddig legnagyobb magyar matematikus, Bolyai János ifjúkoráról apja – a kiváló matematikus Bolyai Farkas – így fogalmaz Gausshoz írt levelében:

„Az én 13+1/4 éves fiam 9. esztendejébe lépve egyebet nem tudott, csak németül és magyarul beszélni s írni, kottából meglehetősen hegedülni, még összeadni sem tudott; először Eukliddal kezdtem, aztán megismerte Eulert, most meg már Vegának nemcsak az első két kötetét tudja teljességgel, járatos a harmadikban, negyedikben is, kedveli a differenciál- és integrálszámítást és rendkívüli készséggel és könnyedén

számol velük... a felnőtt tanítványokkal együtt vizsgázott, s minden tekintetben megfelelt. Nemes egyszerűsége, könnyedsége, világossága, gyorsasága az idegeneket is elragadtatták. Gyors esze van, és sokat felfog, s olykor lángesze villanásánál több sort egyetlen pillantással vizsgálva tekint át. Kedveli a tiszta, mély elméleteket."

Ifjan, 21 évesen írja apjának a híressé vált sorokat: „A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, elkészítem, s mód lesz, a paralellákról egy munkát adok ki..., ha meglátja Édes Apám, megismeri, most többet nem szólhatok, csak annyit, hogy semmiből egy ujj más világot teremtettem."

Erdős Pál, akinek a matematika fejlődésében betöltött szerepe egyedülálló, tehetsége kibontakozásáról így beszél: „Nagyon korán, egészen kisgyermekkoromtól érdekelt a matematika, csodagyereknek is tartottak. Három éves voltam, édesapám hadifogságban volt, édesanyám matematikát tanított az egyik iskolában, én odahaza játszottam a naptárral. Arra voltam kíváncsi, mikor jön el a tanítási szünidő napja, ami számomra ünnepet jelentett, hiszen akkor édesanyám hosszú ideig otthon lehetett velem. Amikor erre a naptár segítségével rájöttem, akkor szinte egyszerre számolni is tudtam. Négyéves koromban mondtam anyukának: ha 150-ből elveszünk 250-et, akkor nulla alatt 100-at kapunk. Ekkor már három-, illetve négyjegyű számokat szoroztam össze fejben. Nagyon korán, már 10 éves koromban elhatároztam, hogy matematikus leszek. Szüleim matematikatanárok voltak, ez megkönnyítette a dolgom."

Egy ma élő rendszermatematikus, Seymour Papert Észrengés című könyvében (1998) szintén a matematikai tehetség kibontakozásának csírájáról, mibenlétéről ír: „Még nem voltam kétéves, amikor érdeklődni kezdtem az autómobilok iránt. Szókincsem jelentős hányadát az autó alkatrészeit jelölő szavak tették ki. Különösen büszke voltam arra, amit az erőátviteli rendszerről, a sebességváltóról és főként a differenciálműről tudtam... Hozzászoktam, hogy gondolatban kerekeket görgetek, és okokozati láncokat építek. Különös örömet leltem az olyan rendszerekben, mint például a differenciálmű, amely nem egyszerű lineáris oksági elvet követ, hiszen az átviteli kar mozgása attól függően tevődik át a két kerékre, hogy melyikben milyen ellenállás mutatkozik. Azt hiszem, a differenciálművel való játszadozásom többet használt matematikai fejlődésemnek, mint mindaz, amit az általános iskolában tanultam. Sok, egyébként teljesen absztrakt gondolatot csempészett be a fejembe a fogaskerekek modellje. Ezzel kapcsolatban két példa jut eszembe az iskolai matematikából. A szorzótáblában sebességváltót láttam, első találkozásom a kétismeretlenes egyenletekkel is azonnal a differenciálművet juttatta eszembe. Mire fejben elkészítettem az x és y közötti kapcsolat fogaskerékmodelljét, elképzelve, hogy hány fognak kell lennie az egyes kerekeken, az egyenlet már jó barátommá vált... Egyenletek asszimilálása fogaskerekek segítségével remek módszer arra, hogy régebbi tudásunkat új tárgyakra alkalmazzuk... Egy nap megdöbbenve fedeztem fel, hogy vannak felnőttek, akik nem értik a fogaskerekek varázslatos működését, de nem is érdekli őket. Lassanként megfogalmazódott bennem, amit ma is a tanulás alapvető tényének tartok: minden könnyű, amit az ember a meglévő modellkészletéhez tud asszimilálni."

Révész Géza 1918-ban kiadott A tehetség korai felismerése című munkájában hosszan fejti ki a matematikai tehetség jellegzetességeit, mibenlétét. Megállapításai között számomra az a legfontosabb, hogy a matematikai tehetség a legkorábban jelentkező tehetségtípusok közé tartozik. Megmutatkozásának átlagos ideje ugyan a zenei tehetség után tapasztalható, de fejlődési fázisai a muzikalitásnál is gyorsabbak. A matematikai tehetség konkrét ismeretanyagot és élettapasztalatot alig igényel, mechanizmusa lényegében egybeesik a formális logikáéval, ezért öntörvényű, autonóm. Ebből adódik, hogy önálló, kreatív felhasználására már igen

korán sor kerülhet. Ezt az előzőekben bemutatott önvallomások is tanúsítják.

A matematikai tehetség fejlődési szakaszairól Révész Géza a következőt mondja: „A mathematikai hajlam alsó fokon, tehát még a gyermekkorban vagy az ifjúkor elején a geometriai, algebrai és az egész számok elméletére vonatkozó kérdések iránti érdeklődésében, és az idevágó feladatok felállításán és megoldásán érzett örömben leli kifejezését. De az elemi mennyiségtan gyors elsajátítása és a kiváló számolókészség még nem mutat talentumra.

A mathematikai hajlam egy magasabb fokát elsősorban a mathematikai módszerek felhasználása és az általános iránti törekvés jellemzi. Az ily fiatal tehetség nemcsak azokat a sémákat használja, melyekre őt megtanították, hanem ezen elemek segélyével tud magának oly feladatok megfejtésére módszert találni, melyeknél a sémákat változatlanul alkalmazni nem lehetne."

Gyarmathy Éva: A tehetség kézikönyve című művében (1998) összefoglalót kapunk mindarról, amit a tudomány eddig megismert a matematikai tehetségről. E szerint a számoló tehetségek és csodagyerekek főképpen kiemelkedő, hosszútávú emlékezetükkel tűnnek ki. Rengeteg művelet eredményét őrzik, és tudják a feladatnak megfelelően mozgósítani. Szívesen számolnak, kicsi koruktól kezdve játszanak a számokkal. Rengeteg időt töltenek számolással. A számolásban kiváló gyerekekből nem feltétlenül lesz matematikai tehetség. A tizenéves kor a vízválasztó ezen a területen. Az unokatestvérek házasságából született gyerekeknél megjelenő halmozódás a recesszív öröklést valószínűsíti, ami genetikai meghatározottságot jelent. A Geschwind (1984) és munkatársainak munkáin alapuló vizsgálatokban azt találták, hogy a tesztoszteron hormon a jobb agyfélteke erősebb fejlődését okozhatja erre érzékeny egyéneknél. Ez a jelenség nagyobb valószínűséget jelent az immunbetegségek kialakulására, a balkezességre és képességbeli eltéréseket, dyslexiát, illetve kiemelkedő képességeket a jobb agyféltekei funkciókban (pl. térbeli tájékozódási és vizuális képességekben) okozhat. Néhány vizsgálat kimutatta, hogy a matematikai tehetségeknél az átlagosnál gyakoribbak az immunbetegségek és a balkezesek száma is nagyobb a normálisnál. A vizsgálatokat azonban még nem teljesen erősítették meg.

A kiváló számolási készség többféle képességgel is elérhető. Van, aki kiváló számemlékezettel és gondolkodási képességekkel lesz kiváló, van, aki kizárólag kiváló hosszútávú memóriával oldja meg a kérdést.

Poincaré (1952) megkülönböztette a matematikai tehetség két típusát, a logikai és az intuitív típust. Az előbbi elmerül a logikában, az utóbbi megérzéseire támaszkodik, gondolkodása vizuális, geometrikus.

Reichel (1997) lényegében ugyanezt a két típust különböztette meg más néven. Az egyik a fogalom-felismerő vagy elmélet-építő, aki egy problémával szembesülve elméleteket alkot, hasonlóságokat ismer fel, leírja a jelenséget, logikai hierarchiát alakít ki és racionálisan gondolkodik. A másik a problémával szembesülve meglát valamit, egy eltérő szempontot, bizonyos kapcsolatot vagy meglepő tényt, amely megoldást ad a problémára.

1945-1985 között a Szovjetunióban is egy nagyszabású, 1000 középiskolai diákra kiterjedő vizsgálatot végeztek Krutyeckij vezetésével a matematikai tehetséggel kapcsolatban.

Krutyeckij 3 fő típust állapított meg. Az egyik az analitikai típus, akire az absztrakt gondolkodás, a fejlett verbális készség és a fejletlen vizuális képkezelés jellemző. A másik típus a geometriai, aki a vizuális képekre támaszkodik. Harmonikus típusnak nevezte el a harmadikat, akiben szerinte mindkét előző típus elemei megtalálhatóak.

Krutyeckij jellemzi a matematikai tehetség életkori sajátosságait is. Úgy látja, hogy a fejlődés a következő dimenziók mentén figyelhető meg:

1. Matematikai feladatok észlelésének jellege szerint halad a konkretizálttól a formalizált felé.

2. Változik a matematikai feladatok általánosításának szintje.
3. Fejlődik a gondolkodási folyamat redukciójának mértéke.
4. Növekszik a gondolkodás folyamatának rugalmassága.
5. Fokozódik a „gazdaságos kivitelezés", az elegáns megoldásokra való törekvés.
6. Magasabb szintet ér el a matematikai emlékezet.

Véleménye szerint a matematikusok személyiségét olyan vonások jellemzik, mint az alkotás öröme, nagy munkabírás, nehéz feladatok iránti vágy, önkritika, szerénység. Olyan specifikus tehetségnek tartja, amely nem feltétlenül párosul egy általános tehetséggel. Erről tanúskodik számtalan ismert tudós életrajza. Úgy gondolja, hogy egy átlagos matematikust ki lehet nevelni, de kiemelkedő, tehetséges matematikusnak születni kell.

A matematikai tehetségeknek igen sok jellemzőjét tárták fel a kutatások, vizsgálatok. A talált jellemzők különböző mértékben jelennek meg. Némely tulajdonság jelzője lehet a kiemelkedő képességeknek:

1. Kitartás, feladat-elkötelezettség a problémamegoldásban.
2. Fáradhatatlan, ha a matematikáról van szó.
3. Csodálatba ejtik a tények, a formulák.
4. Keresi a problémákat.
5. Kiváló emlékezete van számokra, formulákra, viszonyokra, megoldási módokra.
6. Rugalmas a gondolkodása a matematikai struktúrák és minták terén.
7. Könnyen fordít a gondolkodásán.
8. Kiemelkedően jó vizuális képzelet jellemzi.
9. Problémák és absztrakt viszonyok vizualizációjának képessége mutatkozik.
10. A részleteken felülemelkedik, az összetettet egyszerűbbé teszi.
11. A problémát gyorsan formalizálja és általánosítja.
12. Hasonló problémákra már a közbülső logikai lépések kihagyásával reagál.
13. Egyszerű, egyenes, és elegáns megoldásokat keres.
14. Verbális problémákat is egyenletben tud megfogalmazni és kezelni.

A matematikai tehetség azonosítása

Gyarmathy Éva A tehetség kézikönyvében így foglalja össze e téma fontosabb tudnivalóit: „A kiváló matematikai gondolkodású gyerekek már korán nagy érdeklődést mutatnak a számok iránt. Gyakran érzelmileg fordulnak a számok felé, némelyeket megszemélyesítenek, lehetnek kedvenc számaik, és olyanok, amelyeket csúnyának tartanak. Szeretik a számjátékokat, élvezettel számolnak, keresnek és találnak összefüggéseket. Szeretik a kirakójátékokat, a térbeli rejtvényeket, mintákat. Játékaikat rendszerezik, szortírozzák, osztályba sorolják."

A matematikai tehetség tesztekkel történő mérése a terület objektív jellege miatt sokkal megbízhatóbb, mint a képzőművészeti vagy zenei tehetség esetén. Mindazonáltal az alkotó matematikus elmék korai azonosítása még nem megoldott.

Stanlay és munkatársai az Egyesült Államokban iskolai képességeket mérő eljárást használtak a kiemelkedő matematikai képességekkel rendelkező gyerekek válogatásához. A kiemelkedő matematikai képességeket mutató gyerekek verbális képességeit is vizsgálták. Figyelemre méltó jelenség, hogy amennyiben egy gyereknek a matematikai képességei mellett a verbális képességei is nagyon jók (még akkor is, ha nem jobbak, mint a matematikai képességei), kevésbé valószínű, hogy matematikus lesz, mint hogyha a verbális képességei alacsonyabbak. Úgy tűnik, van egy optimális szint és arány a matematikai és verbális képességekben, amely meghatározza, hogy matematikussá válik-e az egyén.

Az újabb elméletek egyre inkább a matematikai tehetségnek a gondolkodási folyamat által történő meghatározását hangsúlyozzák. A folyamatnak két alapvető minőségét említik. Az egyik a szubjektív valóságból a másikba való könnyed áttolását, valamint új szubjektív valóságok könnyed alkotását jelenti.

A Hamburgi Matematikai Tehetség Teszt (1986) szintén a folyamat megragadására épül, és a matematikai tevékenység hat faktorára építve keresi a tehetségeket. A hat faktor, amelyet mint a matematika vagy más kapcsolódó területeken megvalósuló alkotó teljesítmény jelzőjeiként azonosítottak, a következő:

1. Az anyag szervezése.
2. Mintázat és szabályok felismerése.
3. A probléma újrastrukturálása és a szabályok, mintázatok újrafelismerése.
4. Erősen komplex struktúrák megértése és használata.
5. Feldolgozás ellenkező és fordított módon.
6. Kapcsolódó problémák megtalálása vagy kialakítása.

A matematikai tehetségek azonosításának főbb irányelvei a következők lehetnek:

1. A korai érdeklődés és bensőséges kapcsolat a számok terén, a térbeli-vizuális játékok, rejtvények preferálása jelezheti az átlagon felüli matematikai képességeket.
2. A matematikai tehetséggondozó programokban általában a válogatás három típusát, és ezek kombinációját alkalmazzák:
   - objektív képességtesztek,
   - korábbi eredmények és teljesítmények a normál iskolai oktatásban,
   - a matematika iránti érdeklődés.
3. A legjobban matematikai feladatokkal lehet azonosítani a matematikai tehetséget.
4. Számos, a matematikai képességeket mérő eljárás geometriai rejtvényekből áll.
5. A térbeli-vizuális képességeket és a memóriát mérő eljárások sikerrel használhatók az azonosításban.
6. Az intelligencia-tesztek valamelyest korrelálnak a matematikai tehetséggel, de nagy eltérések lehetnek a tesztek eredményei között.
7. Az alkotó matematikai tehetség problémamegoldásban meghatározott, igen hatékony folyamatokat használ.

A tehetség azonosítására nehéz megfelelő eljárásokat találni, mivel a tehetség jelen lehet az idegsejtekben már megszületéskor, kialakulhat a környezet megfelelő stimuláló hatására vagy az energiák koncentrálódása révén.

A matematikára a korán megjelenő talentum jellemző, valószínűleg inkább az idegsejtek elrendeződésének köszönhetően alakul ki a tehetség, ezért a korai azonosításra jó esélye van a szakembereknek.

A kiválasztás szempontjai

A tehetséges tanulók kiválasztása során alapvetően építkezünk a „legközelebbi fejlődési zóna" elméletére (Vigotszkij 1934), amely szerint az oktatásban arra kell törekedni, hogy a követelményeink a legközelebbi fejlődési zóna irányába mutassanak. Ez a várható fejlődés tendenciáját mutatja. Kifejeződik benne a tanulékonyság, az ember képessége az oktatás további befogadására.

Vigotszkij úgy érvelt, hogy az egyén fejlettségét az egyedfejlődés bármely pontján két különböző módon lehet megállapítani:

1. Ha úgy vizsgáljuk az egyén tevékenységét, hogy közben egyedül dolgozik, akkor az úgynevezett érett folyamatokat állapíthatjuk meg.
2. Ha az egyén cselekvését akkor elemezzük, amikor olyan személy nyújt neki segítséget, aki az adott feladatokban járatosabb, vagy aki a kognitív fejlődés magasabb szintjén

jár, akkor az úgynevezett érésben levő kognitív folyamatokat állapíthatjuk meg.

Ha tehát arra a szintre összpontosítjuk figyelmünket, amelyen az egyén a másokkal való együttműködés során teljesít, akkor nemcsak az egyén fejlettségi állapotába nyerhetünk bepillantást, hanem azon következő illetve legközelebbi fejlődési szakaszába is, amely az egyén fejlődése során meg fog jelenni.

Vigotszkij szerint a gyermek gondolkodását kétszer kell megvizsgálni: egyszer önállóan kell feladatot megoldania, egyszer pedig felnőtt segítségével. A két vizsgálat eredménye már megbízható mutató lesz a gyermek fejlesztésére vonatkozóan. Az ilyen jellegű kiválasztás és versenyeztetés egyben meghatározza a tanuló terhelhetőségét is. A Vigotszkij által is javasolt feladatmegoldás a kétfordulós tehetségkutató versenynek felel meg. A felnőtt segítségével történő feladatmegoldás a szakköri foglalkozásokon folyamatos.

„Nem a tudás, hanem a tanulás, nem a birtoklás, hanem a megszerzés, nem az ittlét, hanem az idejövetel az, ami a legnagyobb kielégülést biztosítja"

C. F. Gauss

A matematikai tehetség fejlesztése

Az alapvető törvényszerűségek tanítása

Az alapvető törvényszerűségek tanítása a tantárgyat érthetővé teszi. Az egyes matematikai problémák természetszerűleg magukban rejtenek bizonyos törvényszerűségeket, összefüggéseket, de ezeket minél gyorsabban értelemszerűen meg is kell fogalmaztatni. Gyakran megelégszünk azzal, hogy a gyermek műveleteiből, következtetéseiből kiderül a fogalom ismerete, és nem baj, ha nem tudja azt megfogalmazni. Az értelmes megfogalmazás segíti a probléma tudatosítását. Kelemen László kísérletileg is bebizonyította, hogy a tanítás hatékonyabb, ha a gondolkodási gyakorlatok tudatosulása is megtörténik. Skemp is ezen felfogást vallja.

A matematikai gondolkodás alapjainak tanítása

Amikor azt akarjuk, hogy a gyermek matematikailag gondolkodjon, intelligenciájának minden formáját mozgósítanunk kell. Sok régi tankönyv és tanítási módszer a szimbolikus gondolkodást hangsúlyozza a gondolkodás többi területének rovására. Az újabb matematikai kutatások arra koncentrálnak, hogyan találja meg a gyerek önállóan a megoldást a matematikai feladatokra. A tanár egyik legfontosabb dolga, hogy ápolja a gyermek természetes hajlandóságát, és bátorítsa azt. Az alábbi kérdések alkalmasak arra, hogy előbbre vigyék a matematikai probléma megbeszélését:

– Miért gondolod így?
– Meg tudod mutatni, hogy mire gondolsz?
– Máshogy is meg lehet csinálni?
– Más szavakkal is meg tudod magyarázni?
– Hogyan magyaráznád el valaki másnak?
– Hol lehetne még használni az ötletet?
– Tudnál egy másik példát mondani?

A matematikai gondolkodás fejlődését az is elősegíti, ha megosztjuk a gyermekekkel saját problémáinkat (barkácsolás, recept, kirándulás szervezése), ha izgalmas rejtvényeket adunk fel, ha a matematikai feladatot valószerű vagy képzeletbeli történetbe ágyazzuk. Ha megfelelő mintákat adunk, a gyermekek maguk is képesek történetbe ágyazott feladatokat kitalálni, és a többieknek bemutatni azokat.

A matematikai gondolkodást az is segíti, ha az eljárásokat előre megbeszéljük, és a megvalósításkor végigmondjuk, mit csinálunk. Az is jó módszer, ha a gyermek felírja a jegyzettömbbe vagy a jegyzetfüzetbe, ami eszébe jut. Az elgon-

dolás könnyen elvész a matematikai tevékenységek zűrzavarában.

Sok gyereknek könnyebbséget jelent, ha rajzok, vagy ábrák segítségével fejtheti ki gondolatait.

Másoknak az jelent segítséget, ha valamilyen segédeszközzel modellálni tudják a gondolatmenetet. Ez nemcsak a kisgyermekekre vonatkozik, akik Piaget szerint a „konkrét tevékenységi szakaszban" vannak. Shakespeare azt írta: „Számoló nélkül nem megy." (Téli rege) Manapság a zsebszámológép, számítógép rendkívül hatásos eszközei a matematikának. A feladat azonban változatlanul az, hogy végül magunk találjuk meg az utat a matematika megértéséhez, amiben főleg saját természetes eszünkre támaszkodhatunk. A saját ösvényünk sokkal jobb lehet egy előírt útvonalnál.

A matematikai gondolkodás döntő tényezője az a képesség, hogy felismerjük a szabályszerűségeket, és meglássuk a kapcsolatokat. A matematika a gondolatok erősen strukturált hálózata. Matematikailag gondolkodni annyit jelent, mint ebben a hálózatban kapcsolatokat létrehozni. A matematika nem elszigetelt készségekből és ismeretdarabkákból áll, hanem a fogalmak és eljárások egymással kölcsönösen összekapcsolt váza. Célja az, hogy a gyermek a matematika lényegét jelentő belső szerkezetet lássa, ne megtanulandó, elszigetelt szabályokat és tényeket.

A matematika tanulásának pszichológiájával foglalkozó kutatások szerint fontos megkülönböztetni az eszközökre és kapcsolatokra vonatkozó megértést. Az eszköz típusú megértés a szabályok (algoritmusok) megtanulását, és a bizonyos körülmények között történő alkalmazás képességét jelenti. A szabályokkal az a baj, hogy könnyű őket elfelejteni. A kapcsolatok megértése a szabályok mögött meghúzódó okfejtés ismeretét is jelenti, és azt, hogy a tanuló végiggondolta a szabályokat, és képes rekonstruálni azokat. Ez a fajta tanulás mélyebb, tovább tart, és könnyebb felidézni az emlékezetben.

A matematikai gondolkodás alkotóelemei a következők:

1. **Junktorok:** és, vagy, vagy-vagy, ha..., akkor..., akkor és csakis akkor, sem-sem.
2. **Kvantonok:** minden, van olyan, valamint ezek tagadásai.
3. **Matematikai** tartalmat kifejező **terminusok** helyes használata:
   - szükséges feltétel
   - elégséges feltétel
   - tétel és megfordítása
   - feltétel és következmény
   - következik
   - ellentmondás
   - legalább
   - legfeljebb
4. Matematikai **bizonyítási módszerek** tanítása:
   - indirekt és direkt bizonyítás
   - ekvivalencia formájában kimondott állítások bizonyítása
   - cáfolás ellenpéldával
   - teljes indukció
   - skatulyaelv
5. **Elemi gondolkodási műveletek**

Analízis – valamely dolgot (az elmélet vagy a gondolat síkján) olyan részekre osztunk fel, ahol a részek is önálló egészet alkotnak (pl.: szöveges feladatok adatainak értelmezése).

Szintézis – a részeket gondolatban vagy cselekvésben egésszé kapcsoljuk össze (pl.: a szöveges feladatok adataiból egyenlet felállítása).

Elvonás – konkrét dolgok közös tulajdonságának kiemelése (pl.: a négyzetnek és a rombusznak van közös oldala).

Konkretizálás – egy halmaz tulajdonságát a halmaz egy elemére vonatkoztatjuk (pl. Rajzolj te is odaillő elemet!).

Általánosítás – egy részhalmazról egy bővebb, a részhalmazt tartalmazó halmazra térünk át (egyenlő szárú háromszögek, háromszögek, síkidomok).

Specializálás – az általánosítás fordított művelete (pl.: síkidomok, háromszögek, egyenlő szárú háromszögek).

Összehasonlítás – konkrét vagy elvont dolgok azonosságát vagy különbözőségét tárjuk fel (pl.: Keresd az ugyanolyan alakúakat!).

Rendezés – egy halmazt felismert vagy megadott szempont alapján részhalmazokra bontunk és rendezünk (pl.: számok rendezése megadott szempontok szerint halmazokba).

Összefüggés felfogása – két dolog között valamilyen kapcsolatot, relációt konkrétan megnevezünk (pl.: nagysági vagy mennyiségi relációk megállapítása).

Kiegészítés – valamely dolog és egy adott reláció ismeretében megtaláljuk a másik dolgot (pl.: pótlás).

Analógia – alapelvek hasonlóságának felismerése és alkalmazása (pl.: a következő feladatban a betűk számjegyeket jelentenek. Más-más betű más-más számjegyet. A betűk mindegyike 8-nál kisebb, 3-tól és 4-től különböző számjegyet helyettesít ABC-BBC=CCD).

A hatékony munka érdekében két alapvető követelmény teljesítése elengedhetetlen:

- A tanulók megismerése intellektuális, értelmi, akarati, munkavégzési, szociális és a gondolkodási műveletek fejlettsége tekintetében.
- A feladatok és tevékenységek általános és matematikai elemzése, a fejlesztési funkciók szerinti kiválasztása.

Ha a két elemi követelménynek nem teszünk eleget, akkor az első perctől kezdve csupán a jó és rossz megoldások „leltározására" vállalkozhatunk, s eleve kétségessé válik az egyéni különbségeket is figyelembe vevő tehetségfejlesztő munka.

A megismerő tevékenység fejlesztése

Az **észlelés** fejlesztése a matematikatanítás keretében fontos szerepet játszik. Különösen a látási, a hallási, a mozgási, a tapintási és a szaglási észlelés, valamint az idő- és térészlelés. Az észlelési fejlettség az értelmi és a személyiségi szférára is kihat. A figyelem és a megfigyelőképesség, az analitikus-szintetikus folyamatok magas szintje, a beszédfunkciók és az érzelmi-akarati élet kiegyensúlyozottsága elősegíti a sikeres tanulást.

E területen fontos hangsúlyozottabban foglalkozni a formaanalízis és szintézis képességével. A fejlettség oka lehet:

- az észlelési tapasztalatok rendezettsége,
- a formaképzetek pontossága, valamint a velük végzett értelmi műveletek gyakorlottsága,
- a figyelem és a formai emlékezet egysége,
- a gondolkodás és a beszéd integráló szerepének magas foka.

Feladatok, tevékenységek a formaészlelés fejlesztésére:

- formakiemelés (tárgyak, síkidomok forma szerinti csoportosítása, egybevetése),
- formaanalízis (pálcikákból, tangramból, babilon építőelemekből mértani testek, síkidomok modellezése),
- forma azonosítása, forma megkülönböztetése tárgyakkal,
- képi szinten azonosítás, megkülönböztetés párosítással, alakegyeztetéssel,
- az alak és a háttér megkülönböztetése,
- térbeli tájékozódó képesség fejlesztése. Ezen a területen fontos, hogy fejlesszük a térbeli észlelés képességét, a térbeli feladatok megoldását, a térbeli képzetek és fogalmak szintjét, a térbeli szókincs használatát, valamint a térbeli emlékezetet és a tájékozódást.

A **figyelem fejlesztése,** koncentráltságának, tartósságának, terjedelmének, megosztottságának, átkapcsolhatóságának színvonala a matematikatanulás szempontjából igen jelentős, különösen az azonosítási és a megkülönböztetési feladatok esetében. Pl.:

- tárgyak, dolgok vizuális tulajdonsága szerint ekvivalencia relációjának megállapítása párosítással,

– párosítási kiegészítéses, válogatási, rendszerezési, csoportosítási feladatok esetében (Egészítsd ki! Rendezd!),

– különbségi relációk feltárásakor (Mi változott?),

– szabálykövetéskor.

Az ilyen típusú feladatok egyben az analizáló-szintetizáló, összehasonlító, elvonatkoztató, rendezési képességet is fejlesztik.

Az **emlékezet** fejlesztése a tanulás színvonalát erősen befolyásolja. Fontos az önkéntelen és a szándékos bevésés, megőrzés és felidézés képességének fejlettsége. Meg kell találnunk a helyes arányt, mértéket és helyzetet a mechanikus emlékezet és a problémamegoldó gondolkodás fejlesztésében. (pl.: algoritmusok tanulása, tudása és alkalmazása, szóbeli műveletek elvégzésének pontossága, gyorsasága...)

Irodalom

[1] Allport /1980/ A személyiség alakulása; Gondolat Kiadó Bp.

[2] Balogh L.-Herskovits M.-Tóth L. /1998/ A tehetségfejlesztés pszichológiája, KLT Debrecen

[3] Czeizel Endre /1997/ Sors és tehetség; FITT Image és Minerva Bp.

[4] Cropley /1983/ Tanítás sablonok nélkül; Tankönyvkiadó Bp.

[5] Csapó Benő /1991/ A gondolkodás műveleti képességeinek fejlesztése, Pedagógiai szemle 4. szám 31-40.

[6] Davis-Rimm /1985/ Education of Gifted and Talented Prentice Hall Inc... New Jersey

[7] Davis, Rimm /1992/ A kreatív gondolkodás és a kreatív tanulás tréningje, In: Tehetségfejlesztői Műhely Bp. Fővárosi Pedagógiai Intézet

[8] Gardner /1997/ Rendkívüliek, Kulturtrade Kiadó Bp.

[9] Geschwind, N /1984/ The biology of cerebral dominance: Implication for cognition, Cognition, 17.

[10] Gyarmathy Éva /1998/ A tehetség kézikönyve, Tudományos Ismeretterjesztő Társulat

[11] Gyarmathy Éva /1998/ A Renzulli modell felhasználásának lehetőségei a tehetséggondozásban, In Balogh L., Herskovits M., Tóth L.: A tehetségfejlesztés pszichológiája, KLT Debrecen

[12] Harsányi István /1994/ Tehetségvédelem, Magyar Tehetséggondozó Társulat

[13] Herskovits Mária-Gyarmathy Éva /1995/ A tehetség megítélése, Pedagógiai Szemle XLV. Évf. 10.

[14] Howe /1990/ The Origins of Exceptional Abilities, Basil Blackwell, Oxford

[15] Ignatyev /1989/ A találékonyság birodalmában, Tankönyvkiadó Bp.

[16] Kozéki Béla /1984/ Személyiségfejlesztés az iskolában, Békés Megyei Pedagógiai Intézet Békéscsaba

[17] Landau, Erika /1997/ Bátorság a tehetséghez, Calibra Kiadó

[18] Nagy László /1930/ A tehetség lélektani problémái, Gyermekünk 22. évf. 8-15.

[19] Poincare /1952/ Science and Method, Dower New York

[20] Ranschburg Jenő /1986/ Képesség, tehetség, Pedagógiai Szemle 9. szám 856-867.

[21] Ranschburg Jenő /1988/ A tehetséges tanulók speciális képzésének elméleti és gyakorlati kérdései, Pszichológia /8/ 1. 61-84.

[22] Reichel /1977/ Identifying and promoting mathematically gifted pupils and students. High Ability Studies, Vol 8.

[23] Révész Géza /1918/ A tehetség korai felismerése, Benkő Gyula Csász. és Kir. Könyvkiadó Bp.

[24] Robert Fischer /2000/ Hogyan tanítsuk gyermekeinket gondolkodni, Műszaki Könyvkiadó Bp.

[25] Robert Fischer /2000/ Hogyan tanítsuk gyermekeinket tanulni, Műszaki Könyvkiadó Bp.

[26] Róka Sándor /1997/ Barangolás a matematikában, Tóth Könyvkereskedés Kft.

[27] Seymour Papert /1998/ Észrengés, SZÁMALK Bp.

[28] Tóth László /1998/ A tehetségesek tanítása, KLTE Debrecen

[29] Tóth László /1996/ Tehetségkalauz, KLTE Debrecen

[30] Újvári István /1994/ A gondolkodás alapiskolája, Észak-Pest Megyei Matematikai Tehetségfejlesztő Vác

[31] Vigotszkij /1934/ General pszichology, New Yourk Plenum

Török Tamás

Melyik lottót játsszuk?

Az egyik legrégibb és legnépszerűbb szerencsejáték a lottó. A Szerencsejáték Részvénytársaság szervezésében már három különböző lottójáték közül választhatunk: 5-ös, 6-os és 7-es (skandináv) lottón próbálhatunk szerencsét. A telitalálathoz az 5-ös lottón 90 számból 5-öt, a 6-os lottón 45 számból 6-ot, a skandináv lottón pedig 35 számból 7-et kell eltalálni. A nyerőszámokat mindhárom játékban hetente sorsolják. A 6-os lottónál az 5 találatosok között egy pótszámot húznak ki, így 5+1 találatot is elérhetünk. A skandináv lottónál két esélyt kapunk azáltal, hogy kitöltött szelvényeink a gépi és a kézi sorsolásra egyaránt érvényesek.

Hasonlítsuk össze a három lottójátékot három különböző szempont alapján!

a) **A várható főnyeremények szerinti összehasonlítás:**

Semmiféle matematikai felkészültséget nem igényel, ha az elvileg elérhető legnagyobb nyeremény motivál bennünket. Már a sorsolások előtt – a reklámok „jóvoltából" sokszor akaratlanul is – megtudhatjuk a főnyeremények várható összegét, egyetlen telitalálatos szelvényt feltételezve. Bár ezek az összegek – a fogadók számától és az esetleges halmozódástól függően – mindhárom lottójátéknál hétről hétre változnak, mégis azt mondhatjuk, hogy általában és átlagosan az 5-ös lottó várható főnyereménye a legmagasabb (ld. 4. táblázat). Az eddig kifizetett legnagyobb nyeremény is – ebből a szempontból – az 5-ös lottót igazolja (1 152 054 123 Ft, 2001. 47. hét).

b) **A találati valószínűségek szerinti összehasonlítás:**

Matematikai szempontból mindhárom lottójáték az ún. *visszatevés nélküli mintavételezések* családjába tartozik, az egyes találati valószínűségek hasonló módon számíthatók ki. Az általános képlet egyszerűbb megértéséhez nézzünk egy konkrét példát!

Feladat: Egy 5-ös lottószelvényt kitöltve mekkora a valószínűsége, hogy pontosan 3 találatot érünk el?

Megoldás: Az összes eset (ahányféleképpen az 5 nyerőszámot kihúzhatják) 90 szám 5-öd osztályú *ismétlés nélküli kombinációja:*

$$\binom{90}{5}.$$

Három találatunk úgy lehet, hogy az 5 tipp közül 3 jó

$$\left(\binom{5}{3}\text{ lehetőség}\right),$$

a másik 2 viszont a ki nem sorsolt 85 szám közül való

$$\left(\binom{85}{2}\text{ lehetőség}\right).$$

A három találat elérésének valószínűsége tehát az 5-ös lottón:

$$\frac{\binom{5}{3}\cdot\binom{85}{2}}{\binom{90}{5}}.$$

Az általános képlethez vezessük be a következő jelöléseket a hozzájuk tartozó jelentéstartalommal:

N – ennyi szám közül sorsolnak,
n – ennyi számot sorsolnak ki,
k – találatok száma,
A_k – az az esemény, hogy egyetlen lottószelvényt kitöltve pontosan $k(\leq n)$ találatunk lesz.

Egyelőre éljünk azzal az egyszerűsítő feltételezéssel, hogy a 6-os lottón nincs pótszám, a skandináv lottón pedig csak egyszer sorsolnak. Akkor a konkrét példa általánosításaként

könnyű belátni, hogy mindhárom lottójáték találati valószínűségeit a

$$P(A_k) = p_k = \frac{\binom{n}{k} \cdot \binom{N-n}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

képlet alapján számíthatjuk ki (közvetlenül vagy további megfontolások alapján). Az 5-ös lottón k értéke 0 és 5, a 6-os lottón 0 és 6, a skandináv lottón pedig 0 és 7 között változhat. A részletszámítások mellőzésével foglaljuk táblázatba a számszerű esélyeket! *(1. táblázat)*

A táblázatból kiderül, hogy a telitalálat valószínűsége a skandináv lottónál a legnagyobb (pedig még csak egy sorsolást tételeztünk fel). A 6-os lottó főnyereményére is nagyobb eséllyel pályázhatunk, mint az 5-ös lottónál. Érdekes, hogy pl. a 2 találat valószínűsége ugyanakkora az 5-ös lottón, mint a 3 találat valószínűsége a 6-oson.

5+1 találat valószínűsége a 6-os lottón:

Ha a 6 kihúzott számból 5-öt találunk el, akkor a pótszámmal együtt kihúzott 7 szám alapján 5+1 vagy 5+0 találatunk lehet: $A_5 = A_{5+1} + A_{5+0}$. A pótszám eltalálására $\frac{1}{39}$ az esélyünk, tehát:

$$P(A_{5+1}) = \frac{1}{39} \cdot P(A_5) = 0{,}0000007366 \text{ és}$$

$$P(A_{5+0}) = \frac{38}{39} \cdot P(A_5) = 0{,}0000279924.$$

Tényleges találati valószínűségek a skandináv lottón:

Az 5-ös és a 6-os lottó esetén az A_k események jelentéstartalma világos. A skandináv lottónál a kétféle sorsolás miatt pontosítanunk kell a találatszám fogalmát.

S_{ij} jelentse azt az eseményt, hogy a gépi sorsoláson i, és a kézi sorsoláson j találatot érünk el. Mivel a kétféle sorsolás egymástól független, ezért

$$p_{ij} = P(S_{ij}) = P(A_i) \cdot P(A_j) = p_i \cdot p_j,$$
ahol $(i, j = 0,1,...,7)$.

Az *1. táblázat* utolsó oszlopának felhasználásával a 64 lehetséges (S_{ij}) elemi esemény (p_{ij}) valószínűségei az alábbi struktúrájú táblázatba rendezhetők:

	p_0	p_1	p_2	p_3	p_4	p_5	p_6	p_7
p_0								
p_1								
p_2								
p_3								
p_4								
p_5				×				
p_6								
p_7								

2. táblázat

Az ×-szel jelzett mezőbe pl. annak a valószínűségét írhatjuk, hogy a gépi sorsoláson 5, és a kézi sorsoláson 3 találatunk lesz:

$p_{53} = p_5 \cdot p_3 = 0{,}001180456 \cdot 0{,}1065689447 =$
$= 0{,}00012580$). A táblázatban szereplő 64 szám összege 1 (az S_{ij} események *teljes eseményrendszert* alkotnak).

Ezek után a skandináv lottóban A_k (k = 0, 1,...,7) jelentse azt az eseményt, hogy a kétféle sorsolás közül legalább az egyiken k találatunk

Találati valószínűségek	5-ös lottó	6-os lottó	7-es lottó (1 sorsolás)
$P(A_0)$	0,7463495638	0,4005646367	0,1760779952
$P(A_1)$	0,2303548036	0,4241272624	0,3921737165
$P(A_2)$	0,0224736394	0,1514740223	0,3069185607
$P(A_3)$	0,0008123002	0,0224405959	0,1065689447
$P(A_4)$	0,0000096702	0,0013646308	0,0170510312
$P(A_5)$	0,0000000228	0,0000287291	0,0011804560
$P(A_6)$	–	0,0000001228	0,0000291471
$P(A_7)$	–	–	0,0000001487

1. táblázat

lesz (de ennél több találatot egyik sorsoláson sem érünk el). Az A_3 esemény valószínűségének kiszámításához pl. a *2. táblázat* tónusolt mezőiben szereplő szegélyszámokat kell összeadni:

$$P(A_3) = p_{03} + p_{13} + p_{23} + p_{30} + p_{31} + p_{32} + p_{33}.$$

Az A_k események fenti értelmezésével a tényleges (mindkét sorsolást figyelembe vevő) találati valószínűségek a skandináv lottóban így alakulnak:

Találati valószínűségek	7-es lottó (2 sorsolás)
$P(A_0)$	0,03100346
$P(A_1)$	0,29190655
$P(A_2)$	0,44301300
$P(A_3)$	0,19788888
$P(A_4)$	0,03377007
$P(A_5)$	0,00235945
$P(A_6)$	0,00005829
$P(A_7)$	0,00000030

3. táblázat

Hasonlítsuk össze az 1. és a 3. táblázatot! Szembetűnő, hogy a telitalálat valószínűsége a skandináv lottónál kb. 13-szor akkora, mint az 5-ös lottónál, és 2,5-ször akkora, mint a 6-osnál.

A két táblázat tónusolt mezőiben szerepelnek a „fizetős" találatokhoz tartozó valószínűségek. A pénznyerés (az 5-ös lottónál legalább 2, a 6-os lottónál legalább 3, a skandináv lottónál legalább 4 találat elérésének) valószínűségét ezeknek a számoknak az összege adja. Ez az érték szintén a skandináv lottónál a legnagyobb (3,6%).

c) **A várható nyereség (veszteség) szerinti összehasonlítás:**

Ha egy valószínűségi játékban x_1 , x_2 ,..., x_n nyereséget (vagy veszteséget) p_1, p_2,..., p_n valószínűséggel érhetünk el, akkor a várható nyereséget, másképpen: a nyereség *várható értékét* a

$$V_{ny} = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p_i$$

szorzatösszeg kiszámításával tudhatjuk meg. Ez a nagyon hasznos mutató arra a kérdésre válaszol, hogy mekkora nyereségre számíthatunk rövid- és hosszútávon: 1,2,...,*n* játékot játszva.

Egy lottójátékban a tényleges nyereségünket a nyeremény és a lottószelvény árának különbsége adja. Egy szelvénnyel 5-ös, 6-os vagy 7-es lottót játszva a várható nyereség kiszámításához ismernünk kellene a fizetős találatokhoz (nyerőosztályokhoz) tartozó nyereményeket. A minden héten változó adatok helyett számoljunk pl. a 2000. év azon átlagnyereményeivel, amikor volt telitalálatos szelvény (forrás: *www.szerencsejatek.hu*):

	Átlagnyeremények (y_i) Ft-ban		
	5-ös lottó	6-os lottó	7-es lottó
0 találat	0	0	0
1 találat	0	0	0
2 találat	596	0	0
3 találat	10195	530	0
4 találat	734401	2578	507
5 találat	520497002	160965	2941
5 + 1 találat	–	10526012	–
6 találat	–	106115844	113803
7 találat	–	–	194144085
Szelvény ára	130	130	150

4. táblázat

A várható nyereséget az 5-ös és a 6-os lottón az 1. és a 4. táblázat segítségével számíthatjuk ki:

$$V_{ny}(5) = \sum_{i=0}^{5} (y_i - 130) \cdot p_i = -89{,}39 \text{ Ft},$$

$$V_{ny}(6) = \sum_{i=0}^{6} (y_i - 130) \cdot p_i = -89{,}30 \text{ Ft}.$$

A két érték szinte pontosan megegyezik. Ez azt jelenti, hogy ha egyetlen szelvénnyel akár 5-ös, akár 6-os lottót játszunk, akkor hetente átlagosan kb. – 89 Ft nyereségre, vagyis 89 Ft veszteségre számíthatunk. (Egy évre vetítve ez $52 \cdot 89 = 4628$ Ft veszteséget jelent.)

A várható nyereség a 7-es lottón (a 64 találatkombináció miatt) egy kicsit bonyolultabban számítható a 2. és a 4. táblázat alapján:

$$V_{ny}(7) = \sum_{i=0}^{7} \sum_{j=0}^{7} (y_i + y_j - 150) \cdot p_{ij} = -61{,}39 \text{ Ft}.$$

Tehát egyetlen szelvénnyel skandináv lottót játszva a várható veszteségünk hetente kb. 28 Ft-tal kevesebb, mint az 5-ös vagy a 6-os lottónál. (Egy év távlatában a várható veszteség: $52 \cdot 61 = 3172$ Ft.)

Dr. Kántor Sándorné dr. Varga Tünde

Matematikai versenytesztekről II.

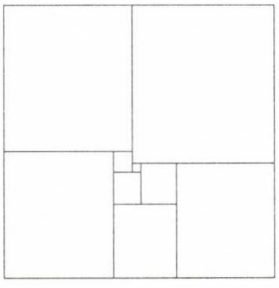
A 2000. évi AIME feladatai

1. Keressük meg azt a legkisebb pozitív n egész számot, amelyre teljesül, hogy bármilyen módon felbontva a 10^n-t két pozitív egész szorzatára, a két tényező közül legalább az egyik tartalmazza a 0 számjegyet.

2. Legyenek v és u olyan egész számok, amelyekre $0 < v < u$ teljesül. Legyen $A = (u; v)$. Jelölje B az A pontnak az $y = x$ egyenletű egyenesre vonatkozó tükörképét, C a B pontnak az y-tengelyre vonatkozó tükörképét, D a C pontnak az x-tengelyre vonatkozó tükörképét, E a D pontnak az y-tengelyre vonatkozó tükörképét. Az $ABCDE$ ötszög területe 451. Mennyi $u + v$?

3. Az $(ax + b)^{2000}$ kifejtésében, ahol a és b relatív prím pozitív egész számok, az x^2 és az x^3 együtthatói egyenlőek. Mennyi $a + b$?

4. Egy téglalapot az ábrán látható módon kilenc nemátfedő négyzetre osztottunk. A téglalap oldalai relatív prím pozitív egész számok. Határozzuk meg a téglalap kerületét.



5. Két doboz mindegyikében fekete és fehér golyók vannak. A két dobozban összesen 25 golyó van. Véletlenszerűen választunk a dobozokból egy-egy golyót. Annak a valószínűsége, hogy mind a két golyó fekete: 27/50, annak a valószínűsége, hogy mind a két golyó fehér: m/n, ahol m és n relatív prím pozitív egész számok. Mennyi $m + n$?

6. Hány olyan egész számokból álló $(x; y)$ rendezett számpár van; amelyekre $0 < x < y < 10^6$, továbbá az x és y számtani közepe pontosan kettővel nagyobb, mint a mértani közepe?

7. Tegyük fel, hogy az x, y, z pozitív számokra

$$xyz = 1, \quad x + \frac{1}{z} = 5, \quad y + \frac{1}{x} = 29$$

egyenletek teljesülnek. Ekkor

$$z + \frac{1}{y} = \frac{m}{n},$$

ahol m és n relatív prím pozitív egész számok. Mennyi $m + n$?

8. Egy egyenes körkúp alakú edény 12 egység magas, alapkörének sugara 5 egység. Ha alaplapja vízszintes és csúcsával lefelé fordítva áll, akkor a belezárt folyadék 9 egység mély. Ha alaplapja vízszintes és csúcsával felfelé fordítva áll, akkor a belezárt folyadék $m - np^{1/3}$ mély, ahol az m, n és p pozitív egész számok, és p nem osztható egyetlen prímszám köbével sem. Mennyi $m + n + p$?

9. Az

$$\lg(2000xy) - \lg x \lg y = 4$$
$$\lg(2yz) - \lg y \lg z = 1$$
$$\lg(zx) - \lg z \lg x = 0$$

egyenletrendszernek két megoldása van: $(x_1; y_1; z_1)$ és $(x_2; y_2; z_2)$. Mennyi $y_1 + y_2$?

10. Az $x_1, x_2, \ldots, x_{100}$ számsorozat azzal a tulajdonsággal rendelkezik, hogy az $1 \le k \le 100$ feltételt kielégítő minden k egész szám esetén az x_k szám k-val kisebb, mint a többi 99 szám összege. Ha $x_{50} = m/n$, ahol m és n relatív prím pozitív egészek, mennyi az $m + n$ összeg?

11. Jelölje S az összes olyan a/b alakú szám összegét, amelyre az a és b az 1000 relatív prím osztói. Melyik az a legnagyobb egész szám, amelyik nem nagyobb, mint $S/10$?

12. Az f függvényre az

$$f(x) = f(398 - x) = f(2158 - x) = f(3214 - x)$$

teljesül minden x valós számra. Legfeljebb hány különböző érték lehet az

$$f(0), f(1), f(2), \ldots, f(999)$$

számok között?

13. A préri közepén két egymásra merőleges egyenes főút kereszteződésében áll egy tűzoltókocsi. A kocsi sebessége a főúton 50 mérföld óránként, a prérin 14 mérföld óránként. Legyen azon pontok halmazának a területe, amelyeket a tűzoltókocsi hat percen belül el tud érni, m/n négyzetmérföld, ahol m és n relatív prím pozitív egészek. Mennyi $m + n$?

14. Az ABC háromszögben $ABC\sphericalangle = BCA\sphericalangle$. A P és Q pontok az AC illetve az AB oldalakon fekszenek úgy, hogy $AP = PQ = QB = BC$ teljesül. Az $ACB\sphericalangle$ r-szer nagyobb, mint az $APQ\sphericalangle$, ahol r egy pozitív valós szám. Melyik az a legnagyobb egész, amelyik nem nagyobb, mint $1000r$?

15. Egy kártyacsomagban 2000 kártya van az 1, 2, . . . , 2000 számokkal megjelölve. Különböző kártyákon különböző számok szerepelnek, és a kártyák a csomagban nincsenek sorba rakva. A legfelső kártyát kivesszük a csomagból, és az asztalra helyezzük, a következő lapot a csomag aljára rakjuk. A következő kártyát megint kirakjuk az asztalra, a már ott lévő jobb oldalára, és a következő lapot megint a csomag aljára tesszük. Ezt addig ismételjük, amíg az összes kártya az asztalra nem kerül. Azt kapjuk, hogy balról jobbra olvasva a kártyákon levő számok növekvő sorrendben következnek: 1, 2, ..., 2000. Az eredeti kártyacsomagban hány darab kártya volt az 1999-cel jelölt kártya felett?

A 2000. évi AMC → 10 kódjai

E-A-B-D-B-C-B-D-C-D-C-C-C-B-C-E-B-D-C-D-C-B-C-E-B-A

A 2000. évi AMC → 12 kódjai

E-A-B-C-C-C-E-C-C-E-E-E-C-E-B-D-D-A-C-B-D-C-B-D-E

A 2000. évi AIME számválaszai

008, 021, 667, 260, 026, 997, 005, 052, 025, 173, 248, 177, 731, 571, 927.

5. A verseny értékelése

5.1 A tanulók taktikájáról

Versenyzőink már nem először indultak tesztversenyen, legtöbbjük részt vett már a Zrínyi Ilona Matematikai Versenyen és a Gordiusz versenyen is. A tanulók többsége szereti ezt a versenyzési formát és fordítva, a tesztfeladatok megoldása alapján elért jó teljesítmény alkalmas a versenyzői adottságok mérésére. A jó feladatmegoldónak lényegében mindegy, hogy milyen formájú a verseny (teszt vagy hagyományos), de az a hatásosabb, ha egymást kiegészítve mindkét formában versenyeznek. A tesztek egyrészről nehezebbek, mert nem szabad tévedni, nincs részpont, rövid az idő, másrészről könnyebbek, mert nem kell pontosan leírni a megoldást, lehet nagyolni a gondolatmenetet, lehet megérzésekre, valószínű sejtésekre támaszkodni, de nagyon rá lehet fizetni a véletlenszerű tippelésre. Az AMC → 10 és az AMC → 12 versenyeken magas pontszámot elérő tanulók elsősorban azokra a feladatokra adták meg a választ, amelyek megoldásában biztosak voltak. Bizonytalanság esetén a biztos 2 pont miatt inkább nem válaszoltak, üresen hagyták a válaszok karikáit.

Néhány sajátos módszert is alkalmaztak. Először nem értettem, hogy miért tartják fontosnak azt, hogy körzőt, vonalzót és szögmérőt is lehet használni. Azt tudtam, hogy a négyzetrácsos papírra mérethű ábrákat készítenek és

azokról olvasssák le az eredményt. Kiderült, hogy ugyanezt az elvet követik egyes síkgeometriai feladatok megoldásánál is, ti. szerkesztéssel oldják meg a feladatokat, méréseket végeznek és ezek alapján döntik el, hogy melyik válasz a helyes. Ezt a taktikát elsősorban akkor alkalmazzák, ha a feladatban olyan kérdés szerepel, hogy egy adott mennyiséghez a válaszokban felsorolt értékek közül melyik van a legközelebb. Ez a szerkesztéssel történő megoldásmód a geometriai gondolkodásnak egy alacsonyabb szintje (gyakorlati szint), de valójában gyorsabb, mint az elméleti szint és itt alkalmazható is.

A feleletkiválasztásnak van egy olyan módszere is, amikor egyszerűen az adott értékek behelyettesítésével is meg lehet keresni a helyes választ. Ez a „rendes" feladatmegoldásnál tulajdonképpen az utolsó lépés, vagyis a behelyettesítés. A tesztfeladatok megoldásánál kreativitás / szerencse kérdése az, hogy elsőként éppen a jó választ találjuk meg.

A tanulók nem szeretik azokat a feladatokat, amelyekhez tartozó háttérismereteik hiányosak,

PROB	A	B	C	D	E	BLANK
1	0,19	11,51	0,11	1,19	84,84*	2,15
2	99,64*	0,05	0,00	0,08	0,02	0,21
3	1,09	98,70*	0,12	0,01	0,00	0,08
4	5,16	0,42	83,71*	0,98	1,17	8,56
5	1,69	3,48	88,94*	1,70	0,52	3,65
6	0,16	0,15	99,01*	0,05	0,05	0,57
7	0,34	1,23	2,43	18,61	70,59*	6,79
8	0,21	6,72	80,33*	0,48	0,19	12,08
9	1,14	1,41	94,30*	0,55	0,15	2,46
10	2,15	7,76	0,48	5,08	53,90*	30,63
11	0,88	0,19	0,22	1,52	80,57*	16,63
12	0,02	0,03	0,81	0,29	95,30*	3,54
13	1,17	2,23	46,72*	2,20	0,61	47,07
14	4,29	0,96	1,19	3,21	27,41*	62,93
15	10,07	57,38*	0,80	0,54	0,33	30,88
16	10,99	7,41	1,82	29,38*	0,63	49,77
17	0,56	6,69	0,91	16,19*	0,54	75,13
18	50,03*	3,02	3,33	3,42	3,08	37,12
19	1,03	0,93	10,36*	1,10	0,90	85,69
20	0,57	24,06*	0,66	0,72	0,49	73,51
21	1,04	4,16	1,96	13,96*	0,66	78,23
22	3,29	1,32	8,49*	2,21	0,70	84,00
23	1,23	4,53*	1,80	2,25	3,38	86,80
24	2,17	0,35	0,38	2,13*	0,36	94,60
25	0,47	0,45	0,88	1,72	4,88*	91,60

* jelenti a helyes választ

1. táblázat

vagy nincsenek. Sokszor hozzá sem fognak azokhoz a feladatokhoz, amelyekben általuk nem vagy kevésbé ismert fogalmak vannak, annak ellenére, hogy ezek definíciója zárójelbe téve a feladat szövegében megtalálható. Ezek a problémák a tantervi anyag különbözőségéből adódnak. Feltétlenül fontos, hogy felkészítsük a legjobbakat ezekből a témakörökből is. Ilyen témakörök: a statisztikai alapfogalmak (átlag, medián, módusz), a valószínűségszámítás, kombinatorika, kombinatorikus geometria, számfogalom (képzetes és komplex számok), magasabb fokú egyenletek esetében a nem valós gyökök megkeresése. Nem szabad azonban elfelejtkeznünk a nehezebb hagyományos témakörökről sem (geometria, számelmélet, függvények).

Ezek a problémák tükröződtek konkrétan az AMC → 10 és az AMC → 12 versenyeken is. Az AMC → 10 23. feladatában számtani közép, medián és módusz szerepelt. Tanulóink közül senki sem foglalkozott érdemben a feladattal, mert teljesítményük 0%-os volt. Az AMC → 12 verseny 22. feladatában egy negyedfokú polinomfüggvény gráfja alapján kellett volna függvényvizsgálatot végezni. Diákjaink teljesítménye itt is 0%-os volt. Szerintem a problémát az okozta, hogy a negyedfokú polinomfüggvény nem valós zérushelyeit is vizsgálni kellett volna, sőt éppen ez volt a helyes válasz. A magyar tantervben, a nem fakultatív osztályokban még a másodfokú egyenlet esetében sem térnek ki a komplex gyökök vizsgálatára, az egyenletek gyökeit a valós számok halmazán keressük.

5.2 Az eredmények elemzése és összehasonlítása

Az AMC → 12 versenyen résztvevő 10 diákunk teljesítménye, a 22. feladat kivételével jobb volt, mint az USA-beli és szintén az AIME-be bekerült diákoké *(1. táblázat, 2. táblázat)*.

Az AMC → 12 feladatai közül nehezebbnek bizonyult:

14. feladat (40%), 16. feladat (40%), 17. feladat (30%), 20. feladat (30%), 21. feladat (30%), 22. feladat (0%), 23. feladat (10%), 24. feladat (10%), 25. feladat (10%).

A kritikusabb feladatok témakörei: algebra, függvények, statisztika, kombinatorika, valószínűségszámítás, geometria.

Az AMC → 10 debreceni versenyzőinek eredményét az USA AIME-be bekerült versenyzőinek az eredményével hasonlítottam össze, annak ellenére, hogy csak 7 versenyzőnk került be az AIME-be. (*3. táblázat, 4. táblázat*).

Mindkét ország versenyzői számára nehéz feladatnak bizonyult a 16. (rácspontok) és a 24. feladat (függvények).

Hasonló típusú volt az 1. és a 20. feladat (maximum keresése). Érdekes, hogy már az 1. feladatnál is rosszabb volt a magyar versenyzők teljesítménye, mint az USA-belieké (70-82%), de a 20. feladatnál ez a különbség már sokkal nagyobb (40-88%).

Nagyon eltérő, vagyis sokkal alacsonyabb, kb. a fele a teljesítménye a magyar versenyzőknek a 17., a 22., a 25. feladatnál. Mindegyik feladat gyakorlati alkalmazással volt kapcsolatban.

Az AMC → 10 feladatai közül a mi diákjaink számára a következő feladatok bizonyultak kevésbé sikeresnek:

1. feladat (70%), 7. feladat (60%), 13. feladat (70%), 15. feladat (50%), 16. feladat (50%), 17. feladat (40%), 19. feladat (30%), 20. feladat (40%), 22. feladat (20%), 23. feladat (0%), 24. feladat (30%), 25. feladat (20%).

Ezeknek a feladatoknak a témakörei: algebra, függvények, statisztika, gyakorlati alkalmazás, kombinatorika, logika, geometria.

Az AMC → 10 és az AMC → 12 feladatsorában 13 feladat volt közös. AMC → 10 (AMC → 12) formában felírva a feladatokat azonosak voltak: 1.(1.), 2.(2.), 3.(3.), 6.(4.), 9.(5.), 11.(6.), 15.(11.), 19.(21.), 20.(12.), 22.(13.), 23.(14.), 25.(18.) feladatok. Megfigyelhetjük, hogy az AMC → 10 feladatsorában az AMC → 12 feladatsorából átemelt feladatok (egy kivételével) magasabb sorszámú feladatokká lettek.

PROB	A	B	C	D	E	BLANK
1	0	10	0	10	80*	0
2	100*	0	0	0	0	0
3	0	100*	0	0	0	0
4	0	0	90*	0	10	0
5	0	10	90*	0	0	0
6	0	0	100*	0	0	0
7	0	0	0	20	80*	0
8	0	10	80*	0	0	10
9	0	0	100*	0	0	0
10	0	0	0	10	80*	10
11	0	0	0	0	100*	0
12	0	0	0	0	100*	0
13	0	0	60*	0	10	30
14	0	0	0	0	40*	60
15	0	90*	0	0	0	10
16	10	10	10	40*	0	30
17	0	0	0	30*	0	70
18	80*	0	0	0	0	20
19	0	0	60*	0	0	40
20	0	30*	0	0	0	70
21	0	10	0	30*	0	60
22	0	0	0*	0	0	100
23	0	10*	0	10	0	80
24	0	0	0	10*	0	90
25	0	0	0	0	10*	90

* jelenti a helyes választ

2. táblázat

PROB	A	B	C	D	E	BLANK
1	0,08	14,53	0,17	0,59	82,01*	2,62
2	98,99*	0,17	0,00	0,59	0,17	0,08
3	1,44	98,40*	0,17	0,00	0,00	0,00
4	0,00	0,84	0,00	99,16*	0,00	0,00
5	6,33	59,97*	8,28	6,93	1,10	17,40
6	6,25	0,42	82,01*	1,52	1,10	8,70
7	0,76	77,28*	1,18	0,84	1,60	18,33
8	0,00	3,21	2,03	94,76*	0,00	0,00
9	2,11	4,81	83,02*	2,03	1,44	6,59
10	1,27	1,10	1,27	78,38*	6,33	11,66
11	0,42	0,00	98,31*	0,00	0,08	1,18
12	0,42	4,48	78,46*	0,51	0,68	15,46
13	1,18	80,24*	8,53	1,44	0,08	8,53
14	1,86	2,11	90,29*	0,59	0,08	5,07
15	1,01	0,34	0,25	1,86	76,18*	20,35
16	1,94	52,62*	1,94	1,35	2,03	40,12
17	0,34	0,08	1,52	74,07*	0,25	23,73
18	2,03	1,60	65,29*	12,58	2,03	16,47
19	2,11	13,94	4,90	18,67*	1,52	58,87
20	1,35	0,25	87,92*	0,76	0,08	9,63
21	1,35	75,25*	0,59	12,58	3,46	6,76
22	0,84	1,86	37,08*	1,77	0,25	58,19
23	5,74	1,52	1,35	2,96	15,37*	73,06
24	10,22	31,84*	1,01	1,10	0,42	55,41
25	46,11*	4,39	3,07	4,56	4,81	36,15

* jelenti a helyes választ

3. táblázat

Azonos a két csoport eredménye: a 2., 3., 5., 11.(6.) feladatok esetén. Rosszabb a kezdők eredménye: az 1.(l.), 6.(4.), 15.(11.), 19.(21.), 20.(12.), 22.(13.), 24.(15.), 25.(18.) feladatok esetében. Nagyon rossz az AMC → 10 versenyen résztvevő tanulóink eredménye a 23.(14.) feladat esetén (0%).

A fenti különbségek, amelyek elsősorban a kevesebb tudásannyaggal magyarázhatók, tükröződnek diákjainknak az AIME-n elért eredményében is. Az AMC → 12-ben induló 10 versenyzőnk mindegyike legalább 6 pontot ért el az AIME-n, önmagukhoz viszonyítva 53-86%-os a teljesítményük. Az AMC → 10 kategóriában induló versenyzőink közül az AIME-be továbbjutott 7 tanuló pontszáma legfeljebb 6, önmagukhoz viszonyított teljesítményük pedig 18-50%-os.

Az AIME feladatai közül diákjainknak alacsonyabb a teljesítménye a 11. (számelmélet), 12. (geometria), és a 14. feladat (geometria) esetén. Ennek két oka volt: egyrészről nehéz volt a feladat a számukra, nem boldogultak vele, másrészről nem maradt rá idejük.

PROB	A	B	C	D	E	BLANK
1	0	30	0	0	70*	0
2	100*	0	0	0	0	0
3	0	100*	0	0	0	0
4	0	0	0	100*	0	0
5	0	80*	0	10	0	10
6	20	0	80*	0	0	0
7	0	60*	0	10	0	30
8	0	10	0	90*	0	0
9	0	0	90*	10	0	0
10	0	0	0	80*	0	20
11	0	0	100*	0	0	0
12	0	0	90*	0	0	10
13	0	70*	10	0	0	20
14	0	0	90*	0	0	10
15	0	0	0	0	50*	50
16	0	50*	0	0	10	40
17	0	0	10	40*	0	50
18	0	0	60*	0	10	30
19	0	0	0	30*	0	70
20	0	0	40*	10	0	50
21	0	60*	0	10	0	30
22	0	0	20*	0	0	80
23	0	0	0	0	0*	100
24	0	30*	0	0	0	70
25	20*	0	10	0	0	70

* jeleni a helyes választ

4. táblázat

A versenyvizsga megírása után azt tapasztaltam, hogy a tanulók reálisan ítélik meg a teljesítményüket és annak ellenére, hogy itt tippjeiket is beírták, tudták, hogy melyik válaszuk a biztosan jó.

Konkluzió

Összehasonlító elemzésünk diagnosztizálta a tanulók gyenge pontjait és ezáltal hozzásegít bennünket a felkészítő munka stratégiájának a kidolgozásához.

Irodalom

[1] Berzsenyi György – Hódi Endre: Annual High School Mathematics Examination, A Matematika Tanítása, 1979. 2. szám 53 - 59.

[2] Berzsenyi, G. – Mauer, S.: The Contest Problem Book V MAA New Mathematical Library 38.

[3] Hódi Endre: Magyar tanulók részvétele a 31. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán, A Matematika Tanítása, 1980. 5. szám 142-148.

[4] Hódi Endre: Magyar tanulók részvétele a 33. Évenkénti Középiskolai Matematikai Versenyvizsgán, A Matematika Tanítása, 1982. 4. szám 116-122.

[5] Kántor Sándorné: Az Amerikai Matematikai Versenyvizsgákról I., A Matematika Tanítása, 1993. 4. szám 3-11.

[6] Kántor Sándorné: Az 1993-96. évi amerikai középiskolai matematikai versenyvizsgák feladatai és megoldási kulcsai, A Matematika Tanítása, 1998. 3-4. szám 9-24.

[7] Széplaki Györgyné: A matematikai tesztek és a gondolkodás, Matematikatanár-képzés-Matematikatanár-továbbképzés, 5. kötet, 1999. 95-116.

[8] 51-st Annual American Mathematical Contests 10 and 12, Summary of Results and Awards

[9] American Mathematics Competitions AMC → 10, AMC → 12, AIME 2000. MAA 2000.

A 2002. évi Beke Manó-emlékdíjasok

A Bolyai János Matematikai Társulat Beke Manó Emlékdíj Bizottsága a Beke Manó-díj első fokozatát ítélte oda **Fried Ervinnének.**

Indoklás:

Fried Ervinné odaadó és eredményes munkájával a magyar matematikusok és matematikatanárok megbecsülését vívta ki. Hozzájárult, hozzájárul ahhoz, hogy a matematika művelése sok-sok középiskolai diák, egyetemista, matematikát művelő tanár és nem tanár, esetleg a matematika feladatokat csak kedvtelésből megoldó ember számára magas szinten hozzáférhető legyen. Pályájának kezdetén Salgótarjánban, majd a budapesti Kanizsai Dorottya Gimnáziumban és a József Attila Gimnáziumban tanított. 1974-től a Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok felelős szerkesztője lett. Nyugdíjba vonulása után is tagja maradt a szerkesztőbizottságnak, 1993 óta tagja a lapot felügyelő kuratóriumnak.

A szakközépiskolások motiválására 1984-ben bevezette a C jelű, a hozzájuk közelebb álló feladatok rovatát, amely mára talán a folyóirat legnépszerűbb rovatává vált. Ezektől az évektől kezdve jelentek meg a lapban a számítástechnikai feladatok is. Külföldi magánútjait is felhasználta arra, hogy az Egyesült Államokban, Kanadában és másutt versenyek alkalmával, konferenciákon, egyetemeken a matematika oktatásában résztvevők közt támogatókat és előfizetőket szerezzen a lapoknak. Jelenleg is szerkeszti a C feladatok mintamegoldásait, és részt vesz az egyik legnehezebb, de legfontosabb munkában, a korrektúraolvasásban.

Szerkesztője volt a lap 1993. évi centenáriumi számának, az 1994. évi angol nyelvű számnak, válogatója és társszerkesztője az 1998-ban megjelent angol nyelvű könyv anyagának. A KöMaL archívum nemrég megjelent internetes változatában is közreműködött; Ő készítette el az új feladatok besorolásának nagy részét.

A Társulat mindig számíthatott együttműködésére. Több éven keresztül tagja volt az Oktatási Bizottságnak. Mindig kiállt munkatársai elismertetéséért, az előforduló méltánytalanságok orvoslásáért.

A Beke Manó-díj 2. fokozatában részesül **Kubatov Antal.**

Indoklás:

Kubatov Antal a Kaposvári Táncsics Mihály Gimnázium tanára. A munkáját közelről ismerők szavait idézve „a magyar matematikaoktatásnak, a matematikai tehetséggondozásnak meghatározó egyénisége". Tanítványai rendszeresen szerepelnek a különböző országos versenyek díjazottai között. Tudását, pedagógiai tapasztalatait szívesen osztja meg fiatalabb tanártársaival. Iskolájában hozzáértéssel irányítja a speciális matematikai osztályok tanítását.

Matematika táborokban, konferenciákon előadásokat, feladatmegoldó szemináriumokat vállal és tart nagy sikerrel. Aktívan vesz részt a Bolyai Társulat munkájában.

Ő volt a Nemzetközi Magyar Matematikaverseny kaposvári rendezője.

A Beke Manó-díj 2. fokozatát ítélte a bizottság **Szommer Imrénének.**

Indoklás:

Szommer Imréné tanító, 1971 óta a Szekszárdi Babits Mihály Általános Iskola hűséges tanára. Sokoldalúan képzett, magát folyamatosan képző pedagógus.

Nagy gondot fordít tanítványainak matematikai nevelésére mind a tanítási órákon, mind azokon kívül is. Iskolájában évek óta szakkört vezet. Kiemelkedő tehetséggondozó munkáját

igazolja növendékeinek különféle matematikai versenyeken tanúsított kitűnő szereplése. A megyei szintű pedagógiai munkába is bekapcsolódott: 3 évvel ezelőtt a megyei matematika mérési csoport tagja volt.

A Beke Manó-díj 2. fokozatát ítélte a bizottság **Lénárt Istvánnak.**

Indoklás:

Lénárt István 1969 óta foglalkozik matematikai és matematika-didaktikai kutatással. 1982 óta oktatási kísérleteket vezet a gömbi geometria minél korábbi taníthatóságát kutatva. Ebből fejlődött ki az a tananyag, amely az ELTE Természettudományi és Tanítóképző karain már az oktatás része lett, és a hallgatók nagy élvezettel követik előadásait, szemináriumait. A sík és gömb összehasonlító geometriája témakörben nem csak Magyarországon, hanem Európa számos országában, Amerikában is nagy sikerű előadásokat tart. Széles látóköre, a hallgatósághoz való alkalmazkodásának képessége teszi lehetővé, hogy a legfiatalabb korosztálytól kezdve a matematika iránt esetleg előítéletekkel bírókig, mindenkihez közel tudja vinni a geometriatanítás más, új szemléletét. A rajzgömb-készlet megalkotásával lehetővé tette, hogy a témakör tanítása a konkrét tevékenység szintjén kezdődhessen. A „Nem-euklideszi kalandok a rajzgömbön" című tankönyve mind Magyarországon, mind az angol nyelvterületen nagy sikert aratott.

A Beke Manó-díj 2. fokozatát ítélte a bizottság **Náfrádi Ferencnek.**

Náfrádi Ferenc a Nyugat-Magyarországi Egyetem Apáczai Csere János Tanítóképző Főiskola Matematika és Természettudományi Tanszékének főiskolai docense, matematika-fizika-számítástechnika szakos középiskolai tanár.

Középiskolai tanárként lényeglátásra, logikus gondolkodásra nevelte tanítványait, a tanítás során megmutatta diákjainak a matematika szépségeit, megéreztette a tantárgy fontosságát, társadalmi hasznosságát Fontosnak tartja, hogy minden diák számára biztosítva legyen a matematika terén a fejlődés lehetősége.

1985 óta mint tanítóképző-főiskolai tanár, 1990 és 1996 között mint tanszékvezető ezt a szemléletet próbálja a leendő tanítók sajátjává tenni. Mind a tanítóképzés, mind a közoktatás területén vezető és fáradságos szerepet vállal oktatási programok kidolgozásában, versenyek szervezésében, lebonyolításában. Rendszeresen részt vesz a felvidéki kihelyezett tanítóképzésben. A Bolyai János Matematikai Társulat megyei tagozati titkára. Számos publikációval gazdagította a középiskolai matematikatanítás és a felsőoktatás szakirodalmát.

A Beke Manó-díj 2. fokozatát ítélte a bizottság **Szakaliné Haraszti Évának.**

Indoklás:

Az egri Neumann János Szakközépiskola és Gimnázium igazgatóhelyettese. Vezetői tevékenysége során iskolájában olyan matematikaoktatási műhelyt hozott létre, melynek eredményeképpen az iskola diákjai évről évre kiváló eredményeket érnek el országos versenyeken. Saját tanítványai is rendszeresen szerepelnek az Arany Dániel verseny és az OKTV díjazottjai között.

A tanulók képességeit figyelembe véve törekszik olyan problémákat kiválasztani, amelyek megoldása minden tanuló számára sikerélményt biztosítanak.

A Beke Manó-díj 2. fokozatát ítélte a bizottság **Veres Pálnak.**

Indoklás:

Veres Pál a miskolci Földes Ferenc Gimnázium igazgatója. Kiválóan felkészült, országosan ismert és elismert tanár, a speciális matematika tantervű oktatás szakembere. Közeli és távolabbi munkatársai szakértelmét, segítőkészségét, emberségét is tapasztalhatják. Nemcsak a matematikában, hanem a közéletben is kiváló problémamegoldó.

Iskolán kívüli tevékenysége is sokoldalú. Rendszeres előadója, programvezetője a Matematikatanárok Nyári Egyetemének. Rendszeresen csoportvezetője a versenygyőztes diákok matematika táborainak. Konferenciák szervezőjeként és előadóként járul hozzá a határon kívüli magyarok szakmai fejlődéséhez. Az Arany János Iskolák Egyesületének elnöke. Aktív résztvevője a Socrates programnak. A Bolyai János Matematikai Társulat Oktatási Bizottságának elnökhelyettese.

A Beke Manó-díj 2. fokozatát ítélte a bizottság **Vígh Máriának.**

Indoklás:

Vígh Mária a budapesti X. kerületi MÁV-telepi általános iskola tanára, szaktanácsadó. Szívügyének tekinti a hátrányos helyzetű tanulók fejlesztését, szakértelemmel, szeretettel, türelemmel foglalkozik tanítványaival, osztozik gondjaikban, örömeikben. Keresi az aktuális fejlesztési helyzetnek megfelelő matematikatanítási eljárásokat. Fővárosi szinten részt vett és vesz a matematikai nevelés megújításának fontos mozzanataiban. Bekapcsolódott a Fővárosi Pedagógiai Intézet és a hollandiai CITO Mérési Központ közös munkájába, amelynek keretében egy gyakorlati szemléletű feladatbank fejlesztésében vesz részt. Az FPI diagnosztikus matematikai méréseihez feladatanyagot készített és tapasztalatait tanulmányokban foglalta össze. Továbbképzéseken, módszertani napokon előadásokat tart. Közreműködője kerületi, budapesti matematikaversenyek, a Varga Tamás Matematikai Verseny tervezésének és lebonyolításának.

Udvari Tibor

A mértani sorozat összegképletének levezetése

A mértani sorozat első n elemének összegét meghatározó képlet bizonyítása, ha nem is nehéz, mégis okoz kisebb gondot az oktatásban. Diákjaink nem értik, miért kell szoroznunk a hányadossal. Miután a különbségképzést elvégeztük, már látják a lépés hasznosságát, de – ha néha megfogalmazzák – szóvá teszik, hogy honnan lehetett ezt előre tudni!? Valljuk be, ez az eljárás még tankönyveinkben is lényegében előzmények nélkül jelenik meg. Megtehetjük azonban, hogy egyszerűbb feladatokkal előkészítjük a bizonyításnak ezt a lépését, sőt az egész bizonyítást. Ennek előnye, hogy kevesebb magyarázatot kell fűznünk hozzá, a diákok maguk fedezhetik fel a célszerű lépéseket. Alapvetően természetes, tapasztalatra támaszkodó műveleteket végzünk, közben pedig fel is elevenítjük a matematika néhány tanult, de az órákon kevésbé használt fogalmát.

Induljunk ki a következő feladatból: adjuk össze az 1, 10, 100, 1000, 10000, ... , 100...00 (n db nulla) mértani sorozat első n elemét! Az összegzést a megszokott, mindenki által ismert összeadási eljárás szerint végezzük. Összegünk így nyilván $n + 1$ darab 1-est tartalmaz: 111...11. Tanári irányítással felhívhatjuk a figyelmet arra a tényre, hogy ha ennek kilencszeresét vesszük, csupa 9-esből álló számot kapunk, amely csak 1-gyel kisebb a 10 egyik hatványánál: $999...99 = 10^{n+1} - 1$. Ez alapján

az összeget felírhatjuk rövidebben, a pontok helyett n segítségével:

$$1+10+100+1000+\ldots+\underbrace{1000\ldots000}_{\text{n darab 0}}=$$

$$=\underbrace{1111\ldots111}_{\text{n+1 darab 1}}=a\frac{10^{n+1}-1}{9}.$$

Ezek után a 10 különbségű mértani sorozatok első n elemének összege erre az eredményre építve már egyszerűen megkapható. Legyen a sorozat a, $10a$, $100a$, $1000a$, ... Az összegből emeljük ki a-t, a maradék éppen az előzőkben vizsgált összeg. Ez alapján tehát:

$$a+10a+100a+1000a+\ldots+\underbrace{1000\ldots000a}_{n\text{ darab 0}}=$$

$$a\frac{10^{n+1}-1}{9}.$$

Lehet-e hasonlóan szemléltetni például az 1, 8, 64, 512, 4096, ... mértani sorozat összegét? Vegyük elő a számrendszerekről tanultakat! (Középiskolában például az informatika tantárgy tanításakor a kettes, nyolcas, tizenhatos számrendszerről, a bennük való műveletekről is szó esik.) Ezek a számok nyolcas számrendszerben felírva 1, 10, 100, 1000, 10000, ... Ha összeadjuk az első n darabot, itt is természetes módon adódik a csupa 1-esből álló 111...11 szám. Ennek hétszerese csupa 7-ből álló szám: 777...77. Ez pedig 1-gyel kisebb az 1000...00 számnál, amely 8 egyik hatványa. Ez alapján:

$$1+8+64+512+4096+\ldots+8^n=\frac{8^{n+1}-1}{7}$$

Most ugyanúgy, mint az előbb, az a, $8a$, $64a$, $512a$, $4096a$, ... sorozat összegét is ismerjük már.

$$a+8a+64a+514a+\ldots+8^n a=a\frac{8^{n+1}-1}{7}.$$

Mindenképpen érdemes még néhány példát feladni más sorozatokra, tehát más számrendszerekre. Ezek a feladatok felhívják a figyelmet az eredményül kapott kifejezés nevezőjére. A számlálókban kapott érték alapján gyorsan meg lehet sejteni az általános eset számlálóját, de a nevezőhöz jobb, ha több példa is kapcsolódik. Először 9-cel szoroztunk, másodszor 7-tel. Miért éppen ennyivel? A példák alapján felismerhető a szabályosság. Ha q pozitív egész szám jelöli a számrendszer alapszámát, akkor:

$$1+q+q^2+\ldots+q^n=\frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

Ha a mértani sorozat hányadosa 1-nél nagyobb pozitív egész szám, akkor az előző szemléltetés mindig működik. Erre alapozva már könnyebb felvetni azt a kérdést, hogy ugyanez a képlet jó lesz-e nem pozitív egész hányadosok esetén is. Ekkor már a képlet előzetes ismerete és elemzése kevésbé adja azt az érzést, hogy a bizonyítást csak úgy „elővarázsoltuk". Hiszen a most felismert és pozitív egész számokon jól működő képlet átalakítása mutatja, hogy mire érdemes figyelni. Igaznak kell lennie a következő összefüggésnek:

$$(1+q+q^2+\ldots+q^n)(q-1)=q^{n+1}-1$$

Ha az első zárójelben levő összeget a szokásos módon S_n-nel jelöljük, akkor éppen az egyébként nehezen magyarázható különbséget kapjuk.

Ha pedig a bal oldalon elvégezzük a szorzást, előáll a jobb oldali kifejezés, hiszen egy olyan „teleszkópos" összeggel lesz dolgunk, amiben szinte minden kiesik:

$$q-1+q^2-q+q^3-q^2+\ldots+q^{n+1}-q^n=$$
$$=q^{n+1}-1.$$

Ez az átalakítás már nem tartalmaz hivatkozást a számrendszerekre, az sem fontos, hogy q egész szám legyen, csak a $q=1$ értékkel kell vigyáznunk. Innen már adódik a szokásos bizonyítás, mégpedig természetes módon, az előző ellenőrző átalakítás megfordításaként.

FELADATROVAT TANÁROKNAK

Rovatvezető: Kosztolányi József

Kérjük, hogy a megoldásokat a rovatvezető címére küldjék: 6757 Szeged, Miklós u. 27. Ugyanide kell küldeni a kitűzésre szánt feladatokat is. Ezeknek a megoldását is mellékeljék! Minden megoldást (tehát ugyanannak a feladatnak a megoldásait is) külön lapra írják tollal vagy géppel, jól olvashatóan! Mindegyiket külön-külön hajtsák össze, és a külső felére írják rá a feladat sorszámát és a megoldó nevét! Csatoljanak a megoldásokhoz összesítő jegyzéket is! A megoldásokat a kitűzést követő harmadik számban ismertetjük. A legjobb megoldásokat beküldőjük nevével közöljük.

Beküldési határidő: 2003. január 31.

Az alábbi öt feladat mindegyike az utóbbi öt év valamelyik középiskolás versenyén volt kitűzve Bulgáriában.

210. Határozzuk meg mindazokat az x, y, z pozitív egész számokat, amelyekre teljesül, hogy y prím és nem osztója z-nek, valamint 3 sem osztója z-nek.

211. Az ABC egyenlő szárú derékszögű háromszög AB átfogójának felezőpontja M. Legyen P a BC befogó tetszőleges pontja, N a C-ből az AP szakaszra állított merőleges talppontja, L pedig az AP szakasz azon pontja, amelyre $AL = CN$.

a) Mekkora az LMN szög?

b) Ha az ABC háromszög területe négyszer akkora, mint az LMN háromszög területe, akkor mekkora a CAP szög?

212. $\{a_m\}_{m=1}^{\infty}$ a pozitív egész számok sorozatának azon részsorozata, amely pontosan azokból a pozitív egészekből áll, amelyeknek tízes számrendszerbeli alakjában csak páros számjegyek fordulnak elő. Határozzuk meg az összes olyan pozitív egész m számot, amelyre $a_m = 12m$.

213. Melyik az a legkisebb n pozitív egész szám, amelyre teljesül, hogy pozitív osztóinak négyzetösszege $(n + 3)^2$?

214. Egy országnak 2001 városa van. Minden egyes városból legalább 1600 másik városba van közvetlen autóbuszjárat. Határozzuk meg azt a legnagyobb n értéket, amelyre teljesül, hogy van az országban n olyan város, amelyek közül bármely kettőt közvetlen autóbuszjárat köt össze.

Feladatmegoldások (195-199. feladatok)

195. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

egyenletnek végtelen sok egész megoldása van!

Megoldás: Legyen $y = -x$. Ezzel az egyenlet

$$2x^2 + z^2 = z^3.$$

Ha $x = mz$, akkor $z = 2m^2 + 1$ tetszőleges m egész szám esetén, ami a feladat állítását bizonyítja.

Több megoldás alapján

Megjegyzés: Ugyanígy látható be, hogy az

$$x^{2n} + y^{2n} + z^{2n} = x^{2n+1} + y^{2n+1} + z^{2n+1}$$

egyenletnek tetszőleges pozitív egész n esetén végtelen sok egész megoldása van.

Dályay Pál Péter, Szeged

A megoldók száma: 13.

196. Hányféleképpen lehet egyrétűen és hézagmentesen lefedni egy $2n$ (n pozitív egész) oldalhosszúságú négyzetet $4n^2$ darab fekete és $4n^2$ darab fehér, egységnyi befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszöggel úgy, hogy az élben szomszédos háromszögek különböző színűek legyenek?

Megoldás: Osszuk fel a nagy négyzetet $4n^2$ darab egységnégyzetre. Egy ilyen egységnégyzet lefedésére a kívánalmaknak megfelelően 4 lehetőségünk van. Fedjük le először a nagy négyzet egyik átlójában levő mezőket. Erre 4^{2n} lehetőségünk van. A már lefedett átlós kis négyzetek által közbezárt négyzetek a feltételeknek megfelelően csak egyféleképpen fedhetők le. Sőt észrevehető, hogy ez a lefedett átlótól távolodva is igaz, azaz a nagy négyzet egy lefedését egyértelműen meghatározza az egyik átló lefedése.

Így a feltételeknek megfelelő lefedések száma $4^{2n} = 16^n$.

Több megoldás alapján

A megoldók száma: 9.

197. Ha az $y = x^2$ egyenletű parabola két érintője 45°-os szöget zár be egymással, akkor milyen kapcsolat van az érintési pontok abszcisszái között?

Fitos László, Esztergom

Megoldás: Legyen α és β az érintőknek az x tengely pozitív felével bezárt pozitív szöge, A és B a két érintési pont, az érintési pontok abszcisszái pedig legyenek rendre a és b. A betűzést mindig megválaszthatjuk úgy, hogy $\alpha > \beta$ teljesüljön. Ekkor $\alpha - \beta = 45°$.

Az érintők meredekségei $\operatorname{tg}\alpha = 2a$ és $\operatorname{tg}\beta = 2b$. Mivel $\operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg}(\alpha - \beta)$, ezért

$$1 = \operatorname{tg} 45° = \operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta} = \frac{2a - 2b}{1 + 4ab}.$$

Az érintési pontok abszcisszái között tehát fennáll a $4ab - 2a + 2b + 1 = 0$ összefüggés.

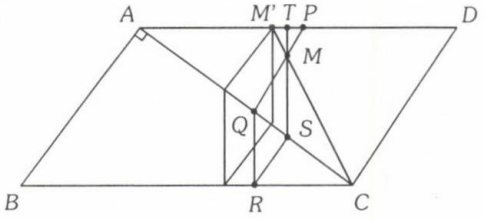
Csorba Ferenc, Győr

A megoldók száma: 13.

198. Az $ABCD$ paralelogrammában az AC átló merőleges az AB oldalra. Az AD oldal P pontjából elindul egy teknősbéka AB-vel párhuzamosan az AC átló felé, s miután a $Q \in AC$ pontba ér, útját a BC oldalra merőleges irányban folytatja. Az $R \in BC$ pontból AB-vel párhuzamosan visszafelé az $S \in AC$ pontig megy, majd innen AD-re merőleges irányban haladva a $T \in AD$ pontba ér. A P pont mely helyzetére teljesül, hogy $P = T$?

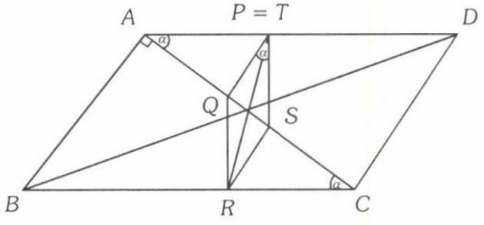
Kiss Sándor, Szatmárnémeti

Megoldás: Jelöljük M-mel a PQ és ST egyenesek metszéspontját, és tekintsük azt a C centrumú nagyítást, amely M-et M'-be viszi *(1. ábra)*. M' tehát az a keresett P pont, amelyre $P = T$. A feladatot a fentiekben szerkesztéssel meg is oldottuk. A következőkben számítással is tesszük ugyanezt.



1. ábra

Legyen $BC = AD = 1$, $AC = a$, $AP = x$ és $ACB\sphericalangle = \alpha$.



2. ábra

Az $\dfrac{AP}{AD} = x$ értékét adjuk meg a illetve α függvényében. Vegyük észre a következőket:

– $QPS\sphericalangle = ACB\sphericalangle = \alpha$ (merőleges szárú szögek);

– $AC = \cos\alpha$, $AQ = x \cdot \cos\alpha$, $PQ = x \cdot \sin\alpha$, $QS = PQ \cdot \operatorname{tg}\alpha = x \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha$.

A megfelelő fenti kifejezéseket helyettesítsük be az $AQ + QS + SC = AC$ egyenletbe, felhasználva, hogy $AQ = SC$:

$2x \cdot \cos\alpha + x \cdot \sin\alpha \cdot \operatorname{tg}\alpha = \cos\alpha$.

Ebből $$x = \frac{\cos^2\alpha}{1 + \cos^2\alpha} = \frac{a^2}{1 + a^2}.$$

Kamarás Lajos, Pécs

A megoldók száma: 12.

199. Igaz-e, hogy egy 50 fős társaságban mindig van két olyan ember, akiknek páros sok

(esetleg 0) közös ismerősük van a társaság tagjai között? (Az ismeretség szimmetrikus reláció.)

Megoldás: Igazolni fogjuk, hogy a feladat állítása igaz bármely $2n$ tagú társaság esetén. Tekintsük azt a $2n$ pontú G egyszerű gráfot, amelyben a pontok a társaság tagjait, az élek az ismeretségeket jelölik. Két lemmát igazolunk:

1. lemma: *Egy legalább két pontú egyszerű gráfban egy páratlan fokszámú ponthoz létezik olyan pont, amellyel páros számú közös szomszédjuk van.*

Bizonyítás: Ha x az egyszerű gráf olyan pontja, amelynek fokszáma $2k - 1$, ahol k pozitív egész, akkor ennek $y_1, y_2, \ldots, y_{2k-1}$ szomszédai között van egy olyan y elem, amelynek a többi y_1 pontok között páros számú szomszédja van. Ez adódik abból, hogy az $y_1, y_2, \ldots, y_{2k-1}$ pontok által feszített részgráfban a pontok ezen részgráfra vonatkozó fokszámainak összege páros. Így mivel a részgráf pontjainak száma páratlan, kell lennie egy olyan pontnak, amelynek a részgráfra vonatkozó fokszáma páros. x és y közös ismerőseinek száma páros, ugyanis ezek csak x szomszédjai közül kerülhetnek ki.

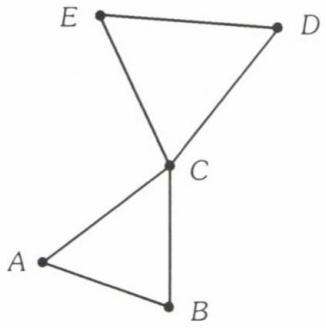
2. lemma: *Ha egy $2n$ pontú (n pozitív egész) egyszerű gráfban minden pont foka páros, akkor minden ponthoz létezik egy másik pont, amellyel páros számú közös szomszédjuk van.*

Bizonyítás: Ha x a lemmában megadott tulajdonságokkal rendelkező egyszerű gráf egy pontja, amelynek fokszáma $2k$ (k nemnegatív egész) és szomszédai $y_1, y_2, \ldots, y_{2k}$, akkor a gráf többi $2n - 2k - 1$ pontja által feszített részgráfnak mint páratlan pontú gráfnak van egy páros fokszámú y pontja. Tehát azon élek száma, amelyek y-t a részgráf pontjaihoz csatlakoztatják, páros. Így mivel y-nak az eredeti gráfra vonatkozó fokszáma is páros, ezért páros számú él csatlakoztatja az $x, y_1, y_2, \ldots, y_{2k}$ pontokhoz is. y az x-nek nyilván nem szomszédja, így y-nak páros számú szomszédja van az $y_1, y_2, \ldots, y_{2k}$ pontok között, vagyis x-nek és y-nak páros számú közös szomszédja van.

Most rátérünk a feladat állításának igazolására. Ha G-ben van páratlan fokszámú pont, akkor az 1. lemma szerint az illető pontnak van olyan társa, amellyel páros számú szomszédjuk van. Ha pedig G-ben minden pont foka páros, akkor a 2. lemma szerint minden pontjához található egy másik pont úgy, hogy páros számú közös szomszédjuk legyen. Tehát minden esetben létezik két olyan tagja a $2n$ tagú társaságnak, hogy nekik páros számú közös ismerősük van.

Dályay Pál Péter, Szeged

Megjegyzés: Páratlan pontú egyszerű gráf esetén nem igaz a feladat állítása. A *3. ábrán* egy olyan öt pontú egyszerű gráf látható, amelyben bármely két pontnak pontosan egy közös szomszédja van.



3. ábra

Vörös Zoltán, Tiszavasvári

A megoldók száma: 4.

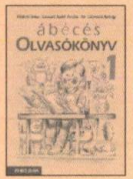
A megoldók névsora: Bukorné Both Emőke, Révkomárom (195., 199.); Csorba Ferenc, Győr (195., 197.); Dályay Pál Péter, Szeged (195-199.); Fitos László, Esztergom (195., 198.); Kamarás Lajos, Pécs (195-198.); Kiss Zoltán, Pécs (195-198.); László Sándor, Szombathely (197.); Nagy Béla, Sarkad (195-198.); Schmidt Edit, Budapest (195-198.); Schuler László, Budapest (195., 197., 198.); Simon József, Csíkszereda (196-198., 199.); Tuzson Zoltán, Székelyudvarhely (195-198.); Udvari Tibor, Baja (195-198.); Vörös Zoltán, Tiszavasvári (195-199.); Zsidó Nagy György, Kolozsvár (195., 197., 198.).

MOZAIK MÓDSZERTANI NAPOK

SZEGED • 2002. november 28., Arany J. Ált. Isk., Kukovecz Nana u. 4-6.
BUDAPEST • 2002. december 3., Baross G. Ált. Isk., VII. ker., Hernád u. 42.

ÁLTALÁNOS ISKOLA

www.altalanosiskola.hu

	Alsó tagozat	Történelem Magyar nyelv	Fizika Informatika	Biológia · Kémia	Földrajz Hon- és népismeret	Ének-zene Művészettörténet
10⁰⁰						
	Olvasás és pedagógia *Ének-zene* *Képességfejlesztés a környezetismeret tanításában*	Horváth Andrea – Horváth Attila: *Életre keltett történelem* *Történelem 5., 6. osztály*	Dr. Halász Tibor: *Gondolatok a fizikatanítás jövőjéről* *Fizika 7., 8., 9. osztály*	Jámbor Gyuláné: *Hogyan folytassuk a biológiai ismeretek tanítását?* *Biológia 7. osztály*	Vízvári Albertné: *Alapozás a természetismeretben; Kontinensek földrajza a 7. osztályos tankönyvben*	Király Katalin: *A különböző érdeklődésű tanulók motiválása* *Ének-zene 5. osztály*
13⁰⁰						
	Szabados Anikó – Árvainé: *Sokszínű matematika 1., 2.* *Környezetismeret* *Környezetünk titkai 1., 2.*	Balkovitzné Cynolter Magda: *Fogalmazási ismeretek és anyanyelv a felső tagozaton* *Anyanyelv 5., 6., 7. osztály*	Rozgonyi-Borus Ferenc: *Számítástechnika 5–10.*	Dr. Siposné dr. Kedves Éva: *A képességfejlesztés lehetőségei a kémia tanításában* *Kémia 7–10. osztály*	Makádi Mariann: *Hogyan tanítsunk hon- és népismeretet? – B változat* *5., 6. osztály*	Falcione Sarolta: *A vizuális kommunikáció egy tankönyv tükrében* *Művészettörténet 5., 6., 7.*

KÖZÉPISKOLA

www.kozepiskola.hu

	Matematika	Magyar nyelv	Fizika	Biológia	Földrajz	Földrajz
14⁰⁰						
	Kosztolányi József – Urbán János: *Sokszínű matematika 9., 10., 11. osztály*	Lerchné dr. Egri Zsuzsa: *A stílus, mint az önérvényesítés eszköze* *Anyanyelv 9., 10. osztály*	Jurisits József: *Nem elrettentő fizika* *Fizika 10. osztály*	Gál Béla: *A biológia szerepe a mindennapi életben* *Gimnázium 10. osztály*	Jónás Ilona/Vízvári Albertné: *Szemléleti és tartalmi változások a társadalomföldrajzban*	Makádi Mariann: *Tanulási technikák a földrajzórán*

Szeretettel várjuk Önöket a kiadó továbbképzéssel egybekötött tankönyvbemutatójára.
Kérjük, részvételi szándékukat november 26-ig jelezzék levélben a 6701 Szeged, Pf. 301., e-mailen a rendeles@mozaik.info.hu címen, vagy a (62) 470-101 telefonszámon.
A rendezvényen a részvétel ingyenes. Tankönyveink a helyszínen 30% kedvezménnyel megvásárolhatók.

www.mozaik.info.hu

MOZAIK